

منبع:

فیزیک

گزینه ۳

۱

بازه زمانی مورد نظر برای محاسبه سرعت متوسط، از $t = 0s$ تا $t = 14s$ است، زیرا در این بازه بردار مکان متحرک در جهت محور x (یعنی x مثبت) است.

$$\bar{v}_{(0-14s)} = \frac{0 - 28}{14} = -2 \text{ m/s} \Rightarrow |\bar{v}_{(0-14s)}| = 2 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

گزینه ۲

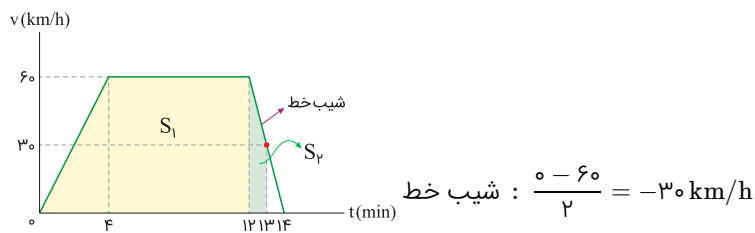
۲

برای محاسبه مسافت طی شده توسط متحرک در نمودار سرعت-زمان، باید مساحت زیر نمودار را محاسبه کنیم. در این مسئله، سرعت بر حسب کیلومتر بر ساعت (km/h) و زمان بر حسب دقیقه (min) است، بنابراین باید واحد زمان را به ساعت تبدیل کنیم تا مسافت بر حسب کیلومتر به دست آید.

مسافت کل طی شده در ۱۳ دقیقه را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:

مسافت طی شده در ۱۲ دقیقه اول (S_1):

$$S_1 = \frac{(\frac{12}{60}h + \frac{1}{60}h) \times 60 \text{ km/h}}{2} = \frac{\frac{13}{60}h \times 60 \text{ km/h}}{2} = 10 \text{ km}$$



مسافت طی شده در دقیقه سیزدهم (S_2):

شیب خط در بازه زمانی ۱۲ تا ۱۴ دقیقه را محاسبه می‌کنیم:

یعنی در هر دقیقه، ۳۰ کیلومتر بر ساعت از سرعت کم می‌شود.

$$S_2 = \frac{(60 + 30) \times \frac{1}{60}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4} = 0.75 \text{ km}$$

$$S_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 10 + 0.75 = 10.75 \text{ km}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

ابتدا باید معادله سرعت لحظه‌ای (v) را بیابیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{4}t^2 - 15t + 30 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ m/s}^2, v_0 = -15 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{2}t^2 - 15$$

محاسبه سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول: ۵ ثانیه اول به معنای بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 5$ s است. در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازه زمانی برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه میانی آن بازه است. لحظه میانی برای این بازه برابر است با $t_1 = \frac{(0 + 5)}{2} = 2.5$ s.

۵ ثانیه سوم به معنای بازه زمانی $t = 10$ s تا $t = 15$ s است. لحظه میانی برای این بازه برابر است با $t_2 = \frac{(10 + 15)}{2} = 12.5$ s.

$$\Rightarrow v = \frac{3}{2}t - 15 \Rightarrow \begin{cases} v_{1,av} = \frac{3}{2} \times (2.5) - 15 = -11.25 \text{ m/s} \\ v_{2,av} = \frac{3}{2} \times 12.5 - 15 = 3.75 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{1,av}}{v_{2,av}} = \frac{-11.25}{3.75} = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴

برای حل این مسئله، ابتدا باید معادلات حرکت (مکان-زمان) هر دو متحرک A و B را به دست آوریم. سپس زمانی را پیدا کنیم که متحرک A در مکان $x = -175$ m قرار دارد و در نهایت، مکان متحرک B را در همان زمان محاسبه کرده و فاصله بین دو متحرک را به دست آوریم. شتاب a_A را با استفاده از شیب خط بدست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-10)}{20} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) t^2 + (-10)t + (-100) \Rightarrow x_A = \frac{1}{4}t^2 - 10t - 100$$

$$\xrightarrow{x_A = -175 \text{ m}} -175 = \frac{1}{4}t^2 - 10t - 100 \Rightarrow -300 = t^2 - 40t$$

$$\Rightarrow t^2 - 40t + 300 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \text{ s} \\ t_2 = 30 \text{ s} \end{cases}$$

با توجه به اینکه سرعت متحرک B بعد از زمان ۲۰ s صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد پس $t_2 = 30$ s قابل قبول است.

$$a_B = \frac{-10}{30} = -0.33 \text{ m/s}^2$$

$$x_B = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) t^2 + (10)t + (100) \xrightarrow{t=30 \text{ s}} x_B = 325 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_B - x_A = 325 - (-175) = 500 \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

برای حل این مسئله، ابتدا باید شتاب ثابت متحرک را محاسبه کنیم، سپس با استفاده از آن، بازه زمانی مورد نظر را پیدا کنیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0, \Delta x=216m} 216 = \frac{1}{2}a(12)^2$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

ما به دنبال بازه‌ای هستیم که در آن مسافت طی شده ۳۶ متر باشد. با توجه به گزینه‌ها متوجه می‌شویم که اختلاف بازه زمانی ۲ ثانیه مدنظر است. پس فرض می‌کنیم بازه زمانی موردنظر برابر با ۲ - t تا t باشد. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_t &= \frac{1}{2}at^2 + 0 \\ x_{t-2} &= \frac{1}{2}a(t-2)^2 + 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta x = \left| \frac{1}{2}a(t^2 - (t-2)^2) \right| \Rightarrow \Delta x = |a(2t-2)| \Rightarrow 36 = 3 \times (2t-2)$$

$$\Rightarrow (2t-2) = 12 \Rightarrow t = 7s$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

بنابراین، بازه زمانی (۲ - t) تا t برابر است با (۲-۷)، یعنی ۵ تا ۷ ثانیه.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

روش اول: نمودار یک سهمی است که محور زمان (t) را در $t = 2s$ و $t = 5s$ قطع می‌کند (یعنی مکان در این لحظات صفر است). معادله سهمی را می‌توان به صورت $x = K(t-2)(t-5)$ نوشت که t و t ریشه‌ها هستند. پس:

$$x = K(t-2)(t-5)$$

نقطه دیگری که از نمودار مشخص است (۰, ۲۰) (یعنی در $t = 0$, $x = 20m$)، با جایگذاری این نقطه در معادله، مقدار K را پیدا می‌کنیم:

$$20 = K(0-2)(0-5) \Rightarrow 20 = 10K \Rightarrow K = 2$$

بنابراین، معادله مکان - زمان متحرک به صورت زیر است:

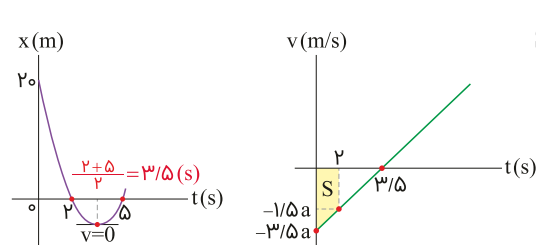
$$x(t) = 2(t-2)(t-5) \Rightarrow x(t) = 2(t^2 - 7t + 10) \Rightarrow x(t) = 2t^2 - 14t + 20$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 2t^2 - 14t + 20 \\ x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2, v_0 = -14 \text{ m/s}, x_0 = 20 \text{ m}$$

$$\Rightarrow v(t) = 4t - 14 \xrightarrow{t=5s} v(5) = 6 \text{ m/s}$$

روش دوم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2+5}{2} = 3/2s \Rightarrow 0 = 3/2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -3/2a \\ t = 2s \Rightarrow v = 2a + v_0 = 2a + (-3/2a) = 1/2a \end{cases}$$

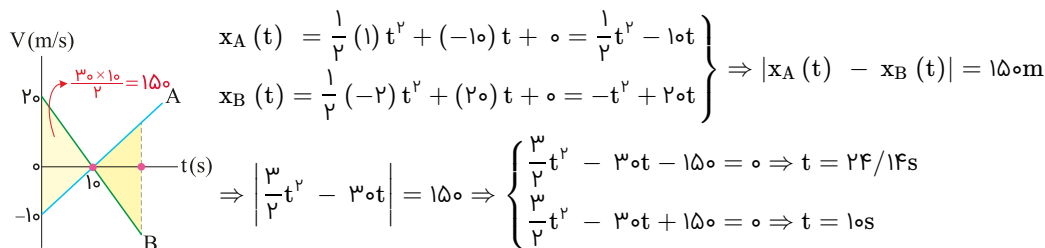


$$S = \frac{(1/2a + 3/2a) \times 2}{2} = 20 \Rightarrow 5a = 20 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow v_0 = -3/2(4) = -14 \text{ m/s} \Rightarrow v = 4t - 14$$

$$\xrightarrow{t=5s} v = 20 - 14 = 6 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴

برای حل این تست باید از زمانی که دو متحرک هم سرعت می‌شوند تا زمانی که هم‌مکان می‌شوند را پیدا کنیم. ابتدا معادلات سرعت هر دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} v_1(t) &= a_1 t = 0/\omega t \\ v_2(t) &= a_2 t = 2(t - 3) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{v_1(t)=v_2(t)} 0/\omega t = 2(t - 3)$$

$$\Rightarrow 1/\omega t = 6 \Rightarrow t = 6\text{s}$$

پس دو متحرک در $t = 6\text{s}$ هم‌سرعت می‌شوند. در این لحظه، سرعت هر دو متحرک ۲ متر بر ثانیه است.

موقعیت متحرک‌ها در لحظه هم‌سرعت شدن در $t = 6\text{s}$:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1(t^2) = 0/2\omega(6)^2 = 6\text{m}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - 3)^2 = (6 - 3)^2 = 9\text{m}$$

بنابراین در لحظه هم‌سرعت شدن، متحرک اول ۳ متر جلوتر است.

برای تعیین زمان برخورد(هم‌مکان شدن دو متحرک)، معادله $x_1(t) = x_2(t)$ را حل می‌کنیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 0/2\omega t^2 = 2(t - 3)^2 \Rightarrow t^2 = 4(t - 3)^2$$

$$\Rightarrow t = 2(t - 3) \Rightarrow t = 6\text{s}$$

تحلیل حرکت:

تا قبل از $t = 6\text{s}$: چون سرعت متحرک دوم کمتر از متحرک اول است، فاصله افزایش می‌یابد.

در $t = 6\text{s}$: سرعت‌ها برابر می‌شوند و فاصله به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

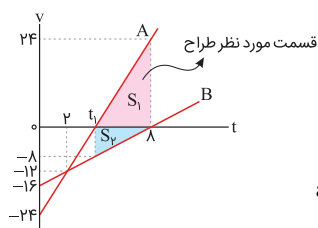
بعد از $t = 6\text{s}$: سرعت متحرک دوم بیشتر می‌شود، بنابراین فاصله کاهش می‌یابد.

در $t = 6\text{s}$ دو متحرک به هم می‌رسند و فاصله صفر می‌شود.

بنابراین فاصله از $t = 6\text{s}$ تا $t = 6\text{s}$ در حال کاهش است، یعنی به مدت ۲ ثانیه.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴

بازه زمانی که دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند یعنی مدت زمانی که:



$$\begin{cases} v_A > 0 \\ v_B < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{بازه زمانی } t_1 \text{ تا } 8 \text{ s}$$

$$a_A = \frac{-12 - (-24)}{2 - 0} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = \frac{v_{t_1} - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow 6 = \frac{0 - (-24)}{t_1} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

$$a_A = \frac{v_8 - v_0}{8 - 0} \Rightarrow 6 = \frac{v_8 - (-24)}{8} \Rightarrow v_8 = 24 \text{ m/s}$$

$$a_B = \frac{0 + 16}{4} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \frac{v_{t_1} - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow 4 = \frac{v_{t_1} - (-16)}{4} \Rightarrow v_{t_1} = -16 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v_{2s} - v_0}{2 - 0} \Rightarrow 4 = \frac{v_{2s} - (-16)}{2} \Rightarrow v_{2s} = -16 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = S_1 + S_v = \frac{24 \times 4}{2} + \frac{4 \times 4}{2}$$

$$\Delta x = 48 + 8 = 56 \text{ m}$$

دو متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ بهم می‌رسند و سپس تا لحظه $t = 8 \text{ s}$ ، متر از هم دور می‌شوند و فاصله بین آن‌ها زیاد می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

ابتدا سرعت را در $t = 0$ ، $t = 1 \text{ s}$ و $t = 2 \text{ s}$ بدست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 = 3t \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 3 \text{ m/s} \\ v_2 = 6 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta K_2}{\Delta K_1} = \frac{\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)} = \frac{36 - 9}{9} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

برای پیدا کردن لحظه‌هایی که مکان متحرک $\vec{x} = (۱۳۶\text{m})\vec{i}$ است، ابتدا باید جابجایی لازم را محاسبه کنیم: مکان اولیه ۱۰m و مکان نهایی ۱۳۶m جابجایی لازم برابر است با:

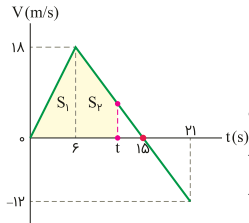
$$\Delta x = ۱۳۶ - ۱۰ = ۱۲۶\text{m}$$

جابجایی متحرک برابر با مساحت زیر نمودار سرعت-زمان است. باید لحظه یا لحظه‌هایی را پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار از $t = ۰$ تا آن لحظه برابر با ۱۲۶ متر شود. نمودار سرعت-زمان از دو بخش خطی تشکیل شده است:

۱. بازه ۰ تا ۶ ثانیه: سرعت از ۰ به ۱۸m/s افزایش می‌یابد. حرکت با شتاب ثابت مثبت است. جابجایی در این بازه (مساحت مثلث):

$$S_1 = \frac{۶ \times ۱۸}{۲} = ۵۴\text{m}$$

چون جابجایی لازم (۱۲۶ متر) بیشتر از جابجایی در ۶ ثانیه اول (۵۴ متر) است، لحظه مورد نظر حتماً بعد از $t = ۶\text{ s}$ خواهد بود.



۲. بازه ۶ تا ۲۱ ثانیه: سرعت از ۱۸m/s به -۱۲m/s کاهش می‌یابد. حرکت با شتاب ثابت منفی است.

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۱۲ - ۱۸}{۲۱ - ۶} = -۲\text{m/s}^2$$

$$t \geq ۶\text{ s} : v(t) = v(۶) + a_2(t - ۶) = ۱۸ - ۲(t - ۶) = ۱۸ - ۲t + ۱۲ = ۳۰ - ۲t$$

$$v(t) = ۰ \Rightarrow t = ۱۵\text{ s}$$

حالا باید مساحت را در بازه دوم محاسبه کنیم تا به جابجایی کل ۱۲۶ متر برسیم. جابجایی مورد نیاز در بازه دوم (از $t = ۶$ به بعد):

$$\Delta x = ۱۲۶ - S_1 = ۱۲۶ - ۵۴ = ۷۲\text{m}$$

مساحت زیر نمودار از $t = ۶$ تا $t = ۱۵$ (مثلث بالای محور زمان):

$$S' = \frac{۹ \times ۱۸}{۲} = ۸۱\text{m}$$

جابجایی کل تا $t = ۱۵\text{ s}$:

$$\Delta x_t = S_1 + S' = ۵۴ + ۸۱ = ۱۳۵\text{m}$$

چون جابجایی لازم (۱۲۶ متر) کمتر از جابجایی تا $t = ۱۵\text{ s}$ (۱۳۵ متر) است، اولین لحظه مورد نظر (t_1) بین ۶ و ۱۵ ثانیه قرار دارد.

و چون جابجایی بعد از $t = ۱۵\text{ s}$ منفی می‌شود (سرعت منفی است)، جابجایی کل دوباره کاهش می‌یابد و ممکن است دوباره به ۱۲۶ متر برسد. پس لحظه دومی (t_2) نیز وجود دارد که بزرگتر از ۱۵ ثانیه است.

پیدا کردن t_1 (بین ۶ و ۱۵): جابجایی از $t = ۶$ تا t_1 باید برابر ۷۲ متر باشد. این مساحت یک دوزنقه است.

$$S_2 = \frac{1}{2}(v(۶) + v(t_1)) \times (t_1 - ۶) \Rightarrow ۱۲۶ - ۵۴ = \frac{1}{2}(۱۸ + (۳۰ - ۲t_1)) \times (t_1 - ۶)$$

$$\Rightarrow t_1^2 - ۳۰t_1 + ۲۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۲\text{ s} \\ t = ۱۸\text{ s} \end{cases}$$

چون t_1 باید بین ۶ و ۱۵ باشد، پس $t_1 = ۱۲\text{ s}$. تا همین‌جا با بررسی گزینه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که پاسخ صحیح گزینه ۲ است.

بنابراین، لحظه‌هایی که مکان متحرک ۱۳۶ متر است، $t = ۱۲\text{ s}$ و $t = ۱۸\text{ s}$ هستند.

ابتدا نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم:

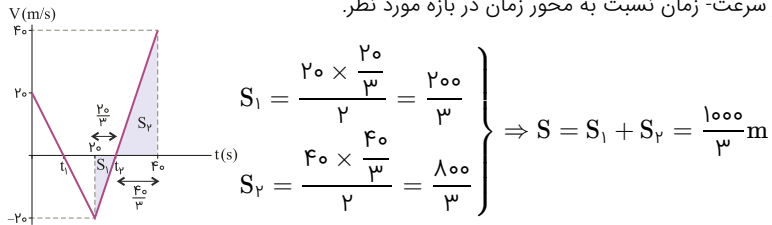
$$(0, 20s) : v = at + v_0 \xrightarrow{v=0} 2t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

$$t = 20s : v(20) = -2 \times 20 + 20 = -20m/s$$

$$(20s, 40s) : v = a(t_2 - 20) + v_0 \xrightarrow{v=0} 3(t_2 - 20) = 20 \Rightarrow t_2 = \frac{20}{3} + 20 = \frac{80}{3}s$$

$$t = 40s : v(40) = 3 \times (40 - 20) - 20 = 40m/s$$

مسافت طی شده برابر است با مجموع مساحت‌های قدر مطلق سطح زیر نمودار سرعت- زمان نسبت به محور زمان در بازه مورد نظر.



بنابراین، مسافتی که متحرک در ۲۰ ثانیه دوم (از $t = 20s$ تا $t = 40s$) طی می‌کند، برابر با $\frac{1000}{3}$ متر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

محاسبه مستقیم:

$$\left. \begin{aligned} a &= -3m/s^2 \\ \Delta x &= 200m \\ v_f &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_f^2 - v_i^2 = -2a\Delta x \Rightarrow v_i^2 = 6 \times 200 = 1200 \Rightarrow v_i = 20\sqrt{3}m/s$$

از معادله سرعت- زمان، زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v_f = at + v_i \Rightarrow t = -\frac{20\sqrt{3}}{-3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

یافتن زمان شروع ۳ ثانیه آخر: ۳ ثانیه آخر حرکت برابر با t_3 خواهد بود. اکنون باید در این زمان سرعت ابتدایی را پیدا کنیم و سپس جابه‌جایی در ۳ ثانیه آخر حرکت را بدست آوریم.

$$v_1 = a(t - 3) + v_i = -3\left(\frac{20\sqrt{3}}{3} - 3\right) + 20\sqrt{3} = 9m/s$$

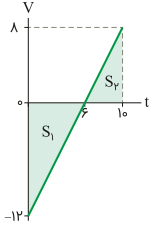
$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t = \frac{1}{2} \times -3 \times 9 + 9 \times 3 = 13.5m$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

برای پیدا کردن مسافت، ابتدا باید ببینیم آیا متحرک در بازه زمانی $[۰, ۱۰]$ تغییر جهت می‌دهد یا خیر. تغییر جهت زمانی رخ می‌دهد که سرعت صفر شود. برای بدست آوردن معادله سرعت- زمان از معادله حرکت جسم مشتق می‌گیریم یا اینکه معادله مکان-زمان را با معادله حرکت جسم مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را بدست می‌آوریم سپس معادله سرعت- زمان را می‌نویسیم:

$$v = ۲t - ۱۲ \xrightarrow{v=0} t = ۶s$$

متحرک در $t = ۶s$ تغییر جهت می‌دهد.



الکون سطح زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم:

$$S = S_1 + S_2 = \left| \frac{-۱۲ \times ۶}{۲} \right| + \left| \frac{۸ \times ۴}{۲} \right| = |-۳۶| + |۱۶| = ۵۲m$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۴

"۲ ثانیه دوم" به بازه زمانی از $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$ اشاره دارد.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= ۳ \times ۴ - ۸ = ۴m/s \\ v_2 &= ۳ \times ۱۶ - ۸ = ۴۰m/s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴۰ - ۴}{۴ - ۲} = ۱۸m/s^2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴

در لحظه $t = ۰s$ ، مکان متحرک B برابر $x_B(0) = ۰$ است. سرعت اولیه متحرک B برابر $v_B(0) = ۱۲m/s$ است. شتاب ثابت متحرک B را a_B می‌نامیم (مجهول مسئله). در این مسئله، نمودار مکان-زمان متحرک A را داریم، و مسیر حرکت متحرک B و سرعت اولیه آن را می‌دانیم. هدف محاسبه شتاب ثابت متحرک B است، با توجه به این که دو متحرک در لحظه $t = ۴s$ به هم می‌رسند.

ابتدا باید معادله مکان-زمان متحرک A را از روی نمودار استخراج کنیم:

در لحظه $t = ۰s$ ، مکان متحرک A برابر $x_A(0) = ۲۰m$ است.

در لحظه $t = ۳s$ ، مکان متحرک A برابر $x_A(3) = ۲۶m$ است.

با توجه به خطی بودن نمودار، می‌توانیم شیب آن را محاسبه کنیم:

$$\frac{۲۶ - ۲۰}{۳ - ۰} = ۲m/s$$

بنابراین معادله مکان-زمان متحرک A به صورت زیر است:

$$x_A = ۲t + ۲۰$$

حالا برای متحرک B داریم:

طبق شرایط مسئله، در لحظه $t = ۴s$ دو متحرک به هم می‌رسند، یعنی $x_A(4) = x_B(4)$.

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲t + ۲۰ = \frac{1}{۲}a_B t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۴ + ۲۰ = \frac{1}{۲}a_B \times ۱۶ + ۱۲ \times ۴ \Rightarrow ۲۸ = ۸a_B + ۴۸$$

$$\Rightarrow a_B = -۲/۵m/s^2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۴

روش اول: ($t_1 = ۴\text{ s}$, $x_1 = ۸\text{ m}$) باید در گزینه درست صدق کند. تنها در گزینه (۲) صدق می‌کند. پس پاسخ درست گزینه ۲ است.

روش دوم: سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۶ - ۸}{۱۰ - ۴} = \frac{۱۸}{۶} = ۳\text{ m/s}$$

مبادله مکان- زمان حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_0$ است. با جایگذاری سرعت و لحظه $t_1 = ۴\text{ s}$ و $x_1 = ۸\text{ m}$ ، مکان اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = ۳t + x_0 \xrightarrow[t_1=۴\text{ m}]{t_1=۴\text{ s}} ۸ = ۳(۴) + x_0 \Rightarrow x_0 = -۴\text{ m}$$

بنابراین معادله حرکت متحرک به صورت $x = ۳t - ۴$ در SI می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

از رابطه $\Delta x = \frac{1}{۲}at^۲(۲n - ۱)$ داریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{۲/\omega at^۲}{۱/\omega at^۲} = \frac{\omega}{۳}$$

روش دوم:

$$x = \frac{1}{۲}at^۲ + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = n \Rightarrow x_1 = \frac{1}{۲}an^۲ \\ t_۲ = ۲n \Rightarrow x_۲ = ۴ \times \frac{1}{۲}an^۲ = ۲x_1 \\ t_۳ = ۳n \Rightarrow x_۳ = ۹ \times \frac{1}{۲}an^۲ = ۹x_1 \end{cases}$$

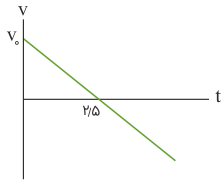
$\Delta x_۲ = x_۲ - x_1 = ۳x_1$: جابه جایی در n ثانیه دوم

$\Delta x_۳ = x_۳ - x_1 = ۵x_1$: جابه جایی در n ثانیه سوم

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_۳}{\Delta x_۲} = \frac{۵}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

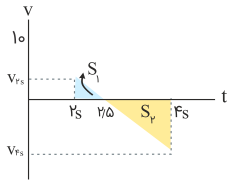
گام اول: طبق تقارنی که حرکت با شتاب ثابت نسبت به لحظه تغییر جهت دارد، اگر جابه‌جایی در یک بازه زمانی صفر باشد، سرعت در لحظه وسط آن بازه برابر با صفر است؛ بنابراین چون جابه‌جایی در ثانیه سوم حرکت صفر است، متحرک در لحظه $۲/۵$ s تغییر جهت داده است. گام دوم: چون شتاب $-۴ \text{ m/s}^۲$ است و متحرک در لحظه $t = ۲/۵$ s تغییر جهت داده است، نمودار سرعت زمان متحرک به صورت زیر خواهد بود:



باتوجه به $a = -۴ \text{ m/s}^۲$ ، v_0 برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۴ = \frac{0 - v_0}{۲/۵ - 0} \Rightarrow v_0 = ۱۰ \text{ m/s}$$

گام سوم: سرعت‌های متحرک در لحظات $t_۱ = ۲$ s و $t_۲ = ۴$ s را تعیین می‌کنیم و با استفاده از مساحت زیر نمودار، مسافت طی‌شده در بازه $(۲ \text{ s}, ۴ \text{ s})$ را به دست می‌آوریم.



$$v = at + v_0 = -۴t + ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} v_{۲s} = ۲ \text{ m/s} \\ v_{۴s} = -۶ \text{ m/s} \end{cases}$$

$$L = S_1 + S_2 = \frac{۲ \times ۰/۵}{۲} + \frac{۱/۵ \times ۶}{۲} = ۵ \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

باتوجه به نمودار، سرعت متحرک در $t = ۴$ s برابر صفر است. همچنین باتوجه به صورت سؤال، سرعت در لحظه $t = ۵/۵$ s برابر است با:

$$v_{۵/۵s} = \frac{\Delta x_{(۵,۶)}}{۶ - ۵} = \frac{-۶}{۱} = -۶ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حالات شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۶ - ۰}{۵/۵ - ۴} = -۴ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$$

با استفاده از معادله مستقل از زمان، تندی در لحظه عبور از مبدأ را به دست می‌آوریم:

$$v_{۴s}^۲ - v_{x=0}^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_{x=0}^۲ = ۲(-۴) \times ۸$$

$$\Rightarrow |v_{x=0}| = ۸ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

طبق تقارن حرکت با شتاب ثابت، سرعت در $t_1 = 0$ و $t_2 = 5$ s، قرینه یکدیگرند. با فرض اینکه $v_0 > 0$ است، بنابراین سرعت در $t_1 = 0$ برابر $v_0 = +10 \frac{m}{s}$ و در $t = 5$ s، برابر $v_{5s} = -10 \frac{m}{s}$ است. بنابراین شتاب حرکت، برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10 - 10}{5} = -4 \frac{m}{s^2}$$

چون لحظه تغییر جهت، $t = 2/5$ s (وسط 0 و 5 s) است و خارج از بازه زمانی (5 s, 10 s) می‌باشد، پس اندازه سرعت متوسط در بازه (5 s, 10 s)، برابر تندی متوسط است و سرعت در وسط این بازه، همان خواسته سؤال است:

$$v_{V/5s} = |v_{av(5s, 10s)}| = |at + v_0|$$

$$\Rightarrow v_{V/5s} = |-4 \times 5/5 + 10| = 20 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

لحظه تغییر جهت و مکان تغییر جهت (رأس سهمی) را به دست می‌آوریم:

$$x = -2t^2 + 10t - 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-(-10)}{2(-2)} = 2/5 \text{ s} \\ x = -2(2/5)^2 + 10(2/5) - 8 = 4/5 \text{ m} \end{cases}$$

دومین لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow -2t^2 + 10t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t^2 - 5t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases} \quad \checkmark$$

حالا سرعت متوسط در بازه (2/5 s, 4 s) را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 4/5}{4 - 2/5} = -3 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

مجموع تغییرات سرعت در بازه‌های (7 s, 10 s) و (10 s, 12 s) را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v = \Delta v_{(7s, 10s)} + \Delta v_{(10s, 12s)}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \frac{25 - 10}{10 - 5} \times (10 - 7) + \frac{15 - 25}{15 - 10} \times (12 - 10)$$

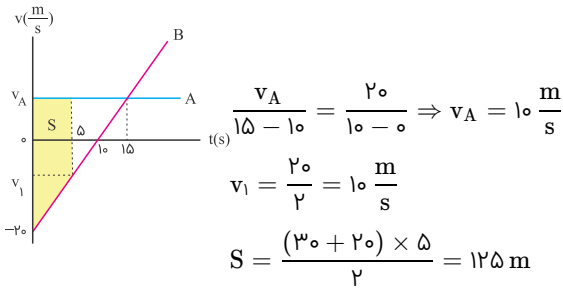
$$\Rightarrow \Delta v = 9 + (-4) = 5 \frac{m}{s}$$

حالا شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{12 - 7} = 1 \frac{m}{s^2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

کافی است مساحت سطح محصور بین دو نمودار در بازهٔ صفر تا ۵ ثانیه را حساب کنیم.



چون در $t = 5 s$ به هم رسیده‌اند، فاصلهٔ آن‌ها در $t = 0$ ، برابر $125 m$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

در $t = 0$ ، متحرک در $x = 15 m$ قرار دارد. کمترین فاصلهٔ یک متحرک از یک مکان، در حرکت با شتاب ثابت، اگر مخالف صفر باشد، یا در لحظهٔ شروع حرکت یا در لحظهٔ تغییر جهت و یا در پایان حرکت است. چون گزینه‌ها کمتر از $15 m$ است، به سراغ مکان تغییر جهت می‌رویم. در اصل، سؤال در اینجا، مکان تغییر جهت را می‌خواهد:

$$x = \frac{2}{3}t^2 - 6t + 15 \Rightarrow \text{تغییر جهت } t = \frac{-(-6)}{2(\frac{2}{3})} = \frac{9}{2} s$$

$$x_{\text{تغییر جهت}} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{9}{2}\right) + 15 = 13/5 - 27 + 15 = 1/5 m$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

ابتدا تغییرات سرعت در هر بازه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1 = 4 \times 15 = +60 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v_2 = a_2 \Delta t_2 = (-4) \times 5 = -20 \frac{m}{s}$$

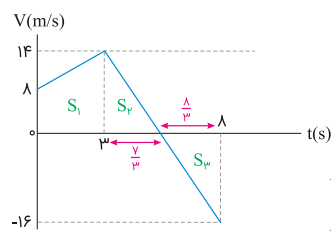
حالا تغییرات سرعت کل و شتاب متوسط در کل حرکت را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 60 + (-20) = +40 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40}{20} = 2 \frac{m}{s^2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

ابتدا نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. شیب نمودار $v - t$ برابر شتاب است.



$$v = at + v_0$$

$$v(3s) = (2)(3) + 8 = 14 \text{ m/s}$$

$$v(8s) = (-6)(8 - 4) + 14 = -16 \text{ m/s}$$

$$0 = (-6)t + 14 \Rightarrow t = \frac{7}{3} \text{ s}$$

$$L = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{8 + 14}{2} \times 4 + \frac{\left(\frac{7}{3}\right)(14)}{2} + \frac{\left(\frac{8}{3}\right)(16)}{2} = \frac{212}{3} \text{ m}$$

$$S = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\frac{212}{3}}{8} = \frac{212}{24} = \frac{53}{6} \text{ m/s}$$

باید نمودار $x - t$ را رسم کنیم تا ببینیم در چند ثانیه فاصله متحرک تا مبدأ کمتر یا برابر ۸ است. پس:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t^2 - 12t + 8 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

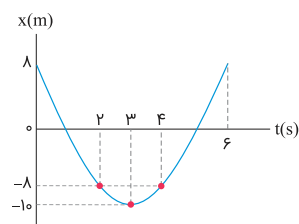
$$v_0 = -12 \text{ m/s}, \quad x_0 = 8 \text{ m}$$

$$v = at + v_0 = 4t - 12 \xrightarrow{v=0} 0 = 4t - 12 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

$$x(3\text{s}) = 2(9) - 12(3) + 8 = -10 \text{ m}$$

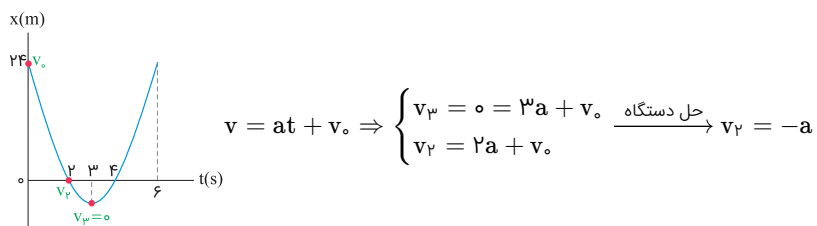
$$x = -8 \Rightarrow -8 = 2t^2 - 12t + 8 \Rightarrow 2t^2 - 12t + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases}$$



طبق نمودار در بازه زمانی $(0, 2\text{s})$ و $(4\text{s}, 6\text{s})$ این اتفاق می‌افتد که برابر با 4s است.

از نمودار $x - t$ کمک می‌گیریم:



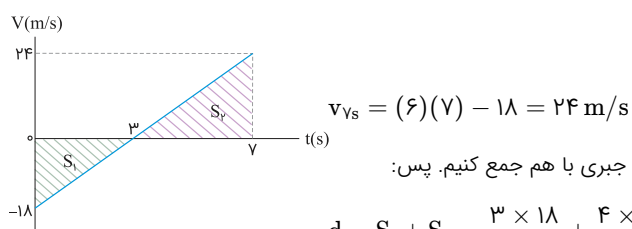
با جایگذاری در معادلهٔ دوم داریم:

$$-a = 2a + v_o \Rightarrow v_o = -3a$$

بین دو بازهٔ $(0, 2s)$ معادله مستقل از زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_2 - v_o &= 2a\Delta x \Rightarrow (-a) - (-3a) = 2a(-24) \\ \Rightarrow a^2 - 9a^2 &= -48a \Rightarrow +1a^2 = 48a \\ \Rightarrow a &= 6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v_o = -3(6) = -18 \text{ m/s} \end{aligned}$$

حال نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم:



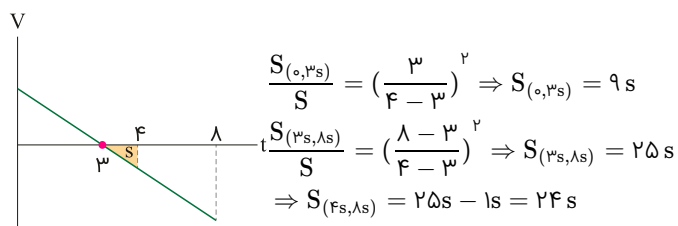
برای محاسبه مسافت باید مساحت S_1 و S_2 را با هم جمع کنیم و برای جابه‌جایی آن‌ها با علامت جبری با هم جمع کنیم. پس:

$$d = S_1 + S_2 = \frac{3 \times 18}{2} + \frac{4 \times 24}{2} = 27 + 48 = 75 \text{ m}$$

$$\Delta x = -S_1 + S_2 = -27 + 48 = 21 \text{ m}$$

$$\frac{S_{(o, ys)}}{v_{(o, ys)}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{d}{\Delta x} = \frac{75}{21} = \frac{25}{7}$$

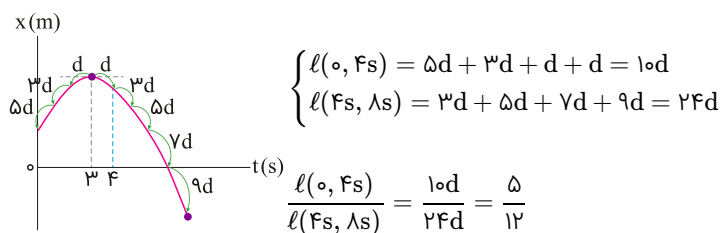
روش اول: نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث رنگی شده را S در نظر بگیریم، مساحت مثلث ۳ ثانیه نخست و دوزنقه بازه (f_s, λ_s) را به‌دست می‌آوریم:



حالا نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

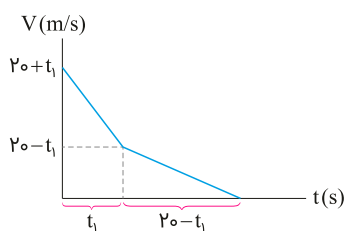
$$\frac{\ell_{(o, f_s)}}{\ell_{(f_s, \lambda_s)}} = \frac{S_{(o, v_s)} + S_{(v_s, f_s)}}{S_{(f_s, \lambda_s)}} = \frac{9s + 1s}{16s} = \frac{5}{12}$$

روش دوم: مسافت طی شده در ثانیه‌های متوالی از لحظه تغییر جهت به قبل به‌صورت $d, 3d, 5d, 7d, 9d$ و ... می‌باشد. پس:



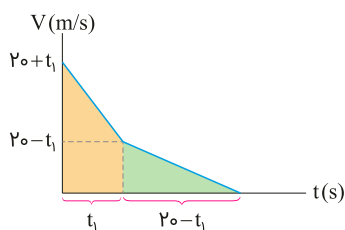
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم. مدت حرکت با شتاب به بزرگی 1 m/s^2 را $(v_0 - t_1)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین سرعت متحرک در لحظه‌ای که شتاب آن از 2 m/s^2 به 1 m/s^2 تغییر می‌کند برابر با $v = |a|_v t = 1 \times (v_0 - t_1)$ است. چون به مدت t_1 ثانیه با شتاب 2 m/s^2 ترمز گرفته است، پس سرعت اولیه متحرک برابر است با:



$$v_0 = a_1 t_1 + v = 2t_1 + v_0 - t_1 = v_0 + t_1$$

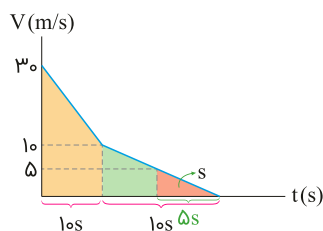
مساحت سطح زیر نمودار در t_1 ثانیه اول و $(v_0 - t_1)$ ثانیه بعدی را حساب می‌کنیم و نسبت آن‌ها را برابر ۴ قرار می‌دهیم تا t_1 به دست بیاید:



$$S_1 = 4S_2 \Rightarrow v_0 t_1 = 4 \left(\frac{(v_0 - t_1)^2}{2} \right)$$

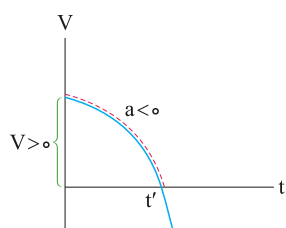
$$\Rightarrow 10t_1 = (v_0 - t_1)^2 \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$

حالا مسافت ۵ ثانیه نهایی را به دست می‌آوریم:



$$\ell = S = \frac{5 \times 5}{2} = 12.5 \text{ m}$$

در بازه $(0, t')$ نمودار بالای محور زمان است پس $v > 0$ است. شیب مماس بر نمودار سرعت- زمان برابر شتاب متحرک است. در بازه $(0, t')$ شیب مماس بر نمودار منفی است. پس شتاب در این بازه منفی است.



در لحظه $t = ۶ s$:

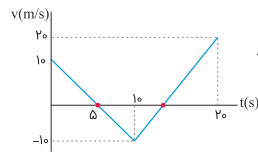
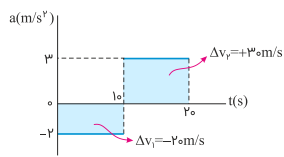
$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \int_0^t a_A t_A^v dt_A = \int_0^t a_B t_B^v dt_B \Rightarrow a_A t_A^v = a_B t_B^v \Rightarrow a t_A^v = (a + ۵)(t_A - ۲)^v$$

$$\Rightarrow ۳۶a = (a + ۵/۵)(۱۶) \Rightarrow ۳۶a = ۱۶a + ۸ \Rightarrow a = ۵/۴ m/s^2$$

$$\begin{cases} t = ۱۰ s : x_A = \frac{1}{v} (۵/۴)(۱۰)^v + \cancel{v_0^0} t = ۲۰ m \\ t = ۸ s : x_B = \frac{1}{v} (۵/۴ + ۵/۵)(۶۴) + \cancel{v_0^0} t = ۲۸/۸ m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = ۲۸/۸ - ۲۰ = ۸/۸ m$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گام اول: نمودار سرعت زمان متحرک را تا لحظه $t = ۲۰ s$ رسم می‌کنیم:

گام دوم: باتوجه به نمودار $v - t$ جابه‌جایی متحرک در $۱۰ s$ اول صفر است؛ پس برای دومین بار در لحظه $t = ۱۰ s$ از مبدأ عبور می‌کند.

گام سوم: اگر شروع مجدد حرکت را با شتاب $۳ m/s^2$ لحظه $t = ۱۰ s$ فرض کنیم، $\frac{۱۰}{۳} s$ بعد سرعت

متحرک صفر و $\frac{۲۰}{۳} s$ بعد سرعت متحرک $+۱۰ m/s$ شده و در این لحظه مجدداً متحرک از مبدأ عبور

می‌کند؛ پس باتوجه به اینکه فرض کردید لحظه شروع حرکت $t = ۱۰ s$ باشد، لحظه‌ای که متحرک برای سومین بار از مبدأ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم:

$$t = ۱۰ + \frac{۲۰}{۳} = \frac{۵۰}{۳} s$$

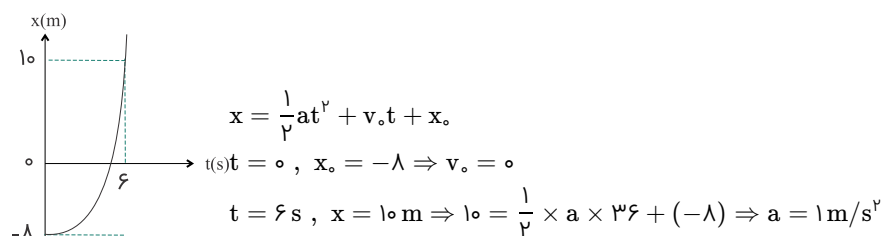
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گام اول

سرعت متحرک در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد؟ ← $x = 0$, $v = ?$

گام دوم

برای به دست آوردن سرعت، معادله سرعت- زمان، و برای به دست آوردن معادله سرعت- زمان، معادله مکان را می‌خواهیم. مطابق نمودار و داده‌های مسئله، معادله مکان را به دست می‌آوریم:



باتوجه به معادله مکان، لحظه عبور از مبدأ برابر است با:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 8 = 0 \Rightarrow t = 6s$$

حال برای ادامه پاسخ، دو روش ارائه می‌شود:

ادامه پاسخ به روش اول:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - 8 \\ x = \frac{1}{3}at^3 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

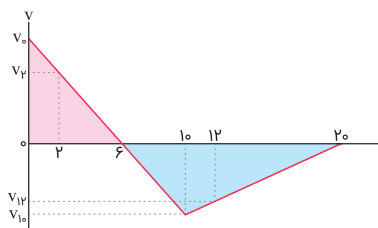
سپس معادله سرعت- زمان را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{(I)} v = t \xrightarrow{t=6s} v = 6 \text{ m/s}$$

ادامه پاسخ به روش دوم:

می‌توان با یکبار مشتق گیری از معادله مکان- زمان، معادله سرعت- زمان را به دست آورد. سپس لحظه $t = 6s$ را در آن جایگذاری می‌کنیم تا سرعت در آن لحظه به دست آید:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 8 \xrightarrow{v=\frac{dx}{dt}} v = t \xrightarrow{t=6s} v = 6 \text{ m/s}$$



$$\text{شیب خط} = \frac{-v_o}{6} = \frac{v_{10}}{4} \Rightarrow v_{10} = \frac{-2}{3}v_o \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{v_o \times 6}{2} + \frac{v_{10} \times 14}{2} = 3v_o + 10v_{10} = 13\lambda$$

$$\xrightarrow{(1)} 3v_o + \frac{14}{3}v_o = \frac{23}{3}v_o = 13\lambda \Rightarrow v_o = 18 \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} v_{10} = -12 \text{ m/s}$$

$$a_1 = \frac{-v_o}{6} = \frac{-18}{6} = -3 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow v = -3t + 18$$

$$a_2 = \frac{-v_{10}}{20 - 10} = \frac{+12}{10} = 1/2 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow v' = 1/2t - 12$$

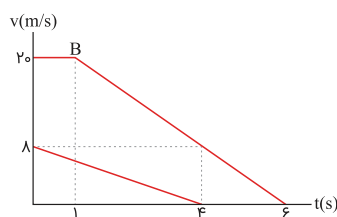
$$\bar{a} = \frac{a_1(10 - 2) + a_2(12 - 10)}{12 - 2} = \frac{-3 \times 8 + 1/2 \times 2}{10} = \frac{-24 + 1/2}{10} = -2/16 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |\bar{a}| = 2/16 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

نمودار $v - t$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:

شتاب حرکت خودرو A، -2 m/s^2 است پس محور زمان را در $t = 4 \text{ s}$ قطع می‌کند. خودروی B، یک ثانیه حرکت یکنواخت دارد و پس از آن با شتاب -4 m/s^2 حرکت می‌کند پس محور زمان را در $t = 6 \text{ s}$ قطع می‌کند.



$$\Delta x_B = \Delta x_A = 46 \Rightarrow (v_B t_B + \frac{1}{2} a_B (t'_B)^2 + v_{oB} t'_B) = (\frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{oA} t_A) = 46$$

$$\Rightarrow (20 \times 1 + \frac{1}{2} (-4) (t - 1)^2 + 20(t - 1)) - (\frac{1}{2} (-2) t^2 + 8t) = 46$$

$$\Rightarrow 20 - 2t^2 - 2 + 4t + 20t - 20 + t^2 - 8t - 46 = 0$$

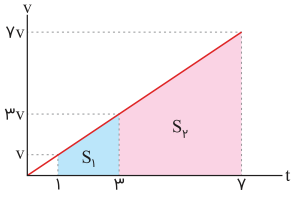
$$\Rightarrow -t^2 + 16t - 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 12 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \end{cases} \text{ لحظه رسیدن}$$

سرعت خودروی B در لحظه رسیدن خودروی A را از ما می‌خواهد پس:

$$v_B = at' + v_{oB} \Rightarrow v_B = -4 \times (t - 1) + 20 = -4 \times 3 + 20 = 8 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

از آن جایی که شتاب ثابت است، نمودار $v - t$ آن به صورت خطی خواهد بود و چون اندازه جابه جایی خواسته شده است اهمیت ندارد شتاب را منفی در نظر بگیریم یا مثبت، پس:



$$S_1 = \frac{(3v + v)(3 - 1)}{2} = Fv \Rightarrow Fv = 20 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

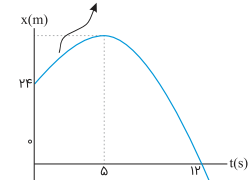
$$S_2 = \frac{(7v + 3v)(7 - 3)}{2} = \frac{10v \times 4}{2} = 20v = 20 \times 5 = 100 \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تغییر سرعت داریم پس نمودار سرعت زمان مطابق شکل زیر خواهد بود.

دو مثلث ایجاد شده در نمودار $v - t$ ، متشابه‌اند پس:

شیب مثبت است پس سرعت مثبت است



$\Rightarrow$



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{v}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{49}{25} \quad (1)$$

از طرفی طبق داده صورت سوال $S_2 - S_1 = 24$ است پس:

$$S_2 - S_1 = 24 \xrightarrow{(1)} \frac{49}{25} S_1 - S_1 = 24 \Rightarrow \frac{24}{25} S_1 = 24 \Rightarrow S_1 = 25$$

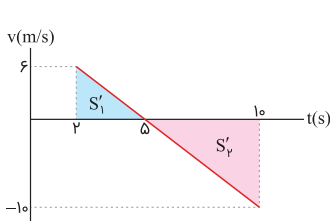
طبق نمودار $v - t$:

$$S_1 = \frac{5 \times v_0}{2} = 25 \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$

حال معادله سرعت را با توجه به ثابت بودن شتاب می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} v &= at + v_0 \Rightarrow v = at + 10 \\ a &= \frac{0 - 10}{5 - 0} = -2 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = -2t + 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 = -2 \times 2 + 10 = 6 \text{ m/s} \\ v_{10} = -2 \times 10 + 10 = -10 \text{ m/s} \end{cases}$$



$$S'_1 = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

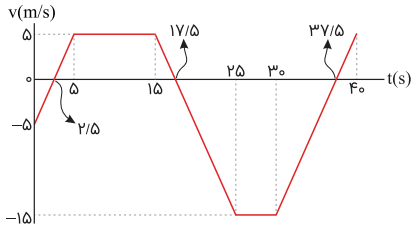
$$S'_2 = \frac{-10 \times 5}{2} = -25$$

$$S_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{25 + 9}{10 - 2} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

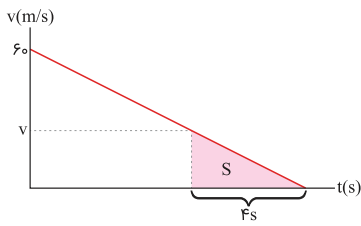
از روی نمودار $a - t$ نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم:

$$I = \frac{25}{2} + \frac{(12/5 + 10)50}{2} + \frac{(20 + 5)15}{2} + \frac{2/5 \times 5}{2} = 262/5$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

از نمودار سرعت- زمان استفاده می‌کنیم:



$$S = 32 \Rightarrow \frac{v \times F}{2} = 32 \Rightarrow v = 16 \text{ m/s}$$

با تشابه مثلث رنگی و مثلث بزرگ، مساحت مثلث بزرگ که مسافت هواپیما روی باند است به دست می‌آید، توجه کنید که نسبت مساحت‌های دو مثلث با توان دوم نسبت اضلاع رابطه مستقیم دارد. پس داریم:

$$\frac{S}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{v}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{16}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{4}{15}\right)^2 \Rightarrow \frac{32}{S_{\text{کل}}} = \frac{16}{225} \Rightarrow S_{\text{کل}} = 450 \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازه زمانی دلخواه با سرعت در وسط آن بازه زمانی برابر است. یعنی سرعت متوسط بین دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 6s$ با سرعت در لحظه $t = 4s$ برابر است. در این صورت داریم:

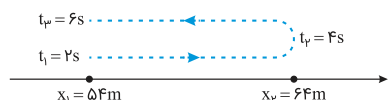
$$v_{av}(2-6s) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{54 - 6}{6 - 2} = \frac{-10}{4} = -2.5 \text{ m/s}$$

$$v_{av}(2-6s) = v_{t=4s} = -2.5 \text{ m/s}$$

ازطرفی سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت نیز با سرعت در لحظه $t = 4s$ برابر است. پس داریم:

$$v_{av}(0-10s) = v_{t=4s} = -2.5 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}(0-10s)| = 2.5 \text{ m/s}$$

روش دوم:



باتوجه به شکل مسیر حرکت جسم در لحظه $t_2 = 6s$ ، جهت حرکت جسم تغییر کرده است. ازطرفی می‌دانیم تندی حرکت جسم در لحظه $t_1 = 2s$ با $t_2 = 6s$ برابر است. اکنون با استفاده از رابطه محاسبه سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av}(2-6) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 54}{6 - 2} = -11.5 \text{ m/s}$$

$$v_{av}(2-6) = \frac{v_2 + v_6}{2} \Rightarrow 11.5 = \frac{v_2 + 0}{2} \Rightarrow v_2 = 23 \text{ m/s}$$

اکنون برای محاسبه شتاب داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 23}{2} = -11.5 \text{ m/s}^2$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$t = 2s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow 23 = -11.5(2) + v_0 \Rightarrow v_0 = 46 \text{ m/s}$$

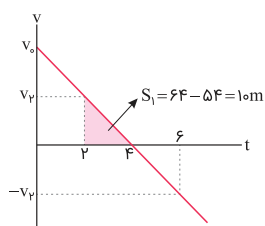
$$t = 10s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -11.5(10) + 46 = -70 \text{ m/s}$$

پس بزرگی سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$|v_{av}(0-10)| = \left| \frac{v_{10} + v_0}{2} \right| = \left| \frac{-70 + 46}{2} \right| = 12 \text{ m/s}$$

روش سوم:

با رسم نمودار سرعت- زمان و استفاده از سطح زیر نمودار خواهیم داشت:



$$S_1 = \frac{1}{2} v_2(2) \Rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_6 = at + v_2 \Rightarrow 0 = 2a + 20 \Rightarrow a = -10 \text{ m/s}^2$$

برای محاسبه سرعت اولیه حرکت با استفاده از معادله سرعت- زمان داریم:

$$v_6 = at + v_0 \Rightarrow 0 = -10(6) + v_0 \Rightarrow v_0 = 60 \text{ m/s}$$

برای محاسبه سرعت در لحظه $t = 10s$ داریم:

$$v_{10} = at + v_0 \Rightarrow v_{10} = -10(10) + 60 = -40 \text{ m/s}$$

در این صورت سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$v_{av(o-l_o)} = \frac{v_o + v_{l_o}}{۲} = \frac{۲o + (-۳o)}{۲} = -\omega \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |v_{av(o-l_o)}| = \omega \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۴۳

ابتدا سرعت دو متحرک را حساب می‌کنیم:

$$v_A = \frac{۲_{oo} - ۱_{oo}}{۱o} = ۱o \text{ m/s}$$

$$v_B = \frac{۲_{oo}}{۱o} = ۲o \text{ m/s}$$

چون دو متحرک هم‌جهت حرکت کرده‌اند، سرعت نسبی آن‌ها برابر است با:

$$v = ۲o - ۱o = ۱o \text{ m/s}$$

هنگامی‌که فاصلهٔ دو متحرک کمتر یا مساوی ۲o متر می‌شود یعنی فاصلهٔ دو متحرک ابتدا ۲o متر شده، سپس به صفر رسیده و مجدداً برابر ۲o m می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t \Rightarrow ۴o = ۱ot \Rightarrow t = ۴s$$

روش دوم:

باتوجه‌به نمودار، معادلهٔ حرکت جسم‌ها را می‌نویسیم:

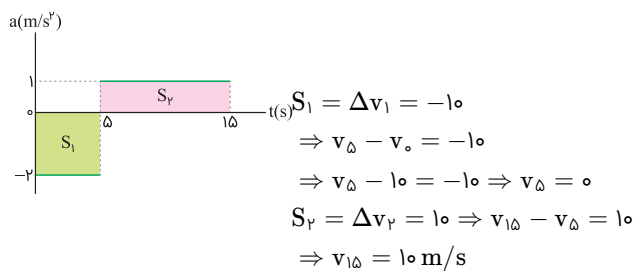
$$x = vt + x_o \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱ot + ۱_{oo} \\ x_B = ۲ot - ۲_{oo} \end{cases}$$

با استفاده از شرط مسأله در مورد فاصلهٔ دو جسم داریم:

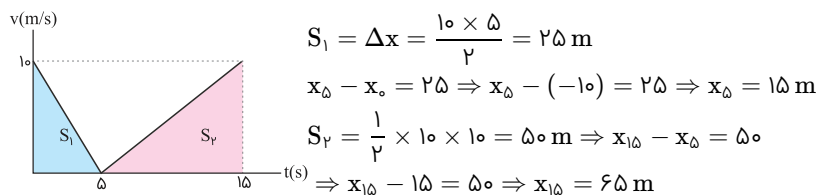
$$\begin{cases} x_A - x_B = ۲o \Rightarrow -۱ot + ۳_{oo} = ۲o \Rightarrow t = ۲\lambda s \\ x_B - x_A = ۲o \Rightarrow +۱ot' - ۳_{oo} = ۲o \Rightarrow t' = ۳۲s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۴s$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

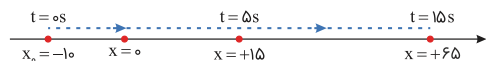
سطح زیر نمودار شتاب- زمان با تغییرات سرعت برابر است.



اکنون نمودار سرعت- زمان حرکت جسم را رسم می‌کنیم، مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان با جابه‌جایی برابر است. در این صورت داریم:



بنابراین می‌توان مسیر حرکت جسم را رسم کرد:



در این صورت می‌توان نتیجه گرفت:

(۱) بردار مکان جسم یک بار تغییر کرده است، اما علامت سرعت تغییر نکرده است.

(۲) جهت حرکت جسم تغییر نکرده است در این صورت مسافت و جابه‌جایی باهم برابر است.

(۳) شتاب متوسط در مدت‌زمان نشان داده‌شده برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 10}{15 - 0} = 0$$

(۴) سرعت متوسط در مدت‌زمان نشان داده‌شده برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{75}{15} = 5 \text{ m/s}$$

روش اول:

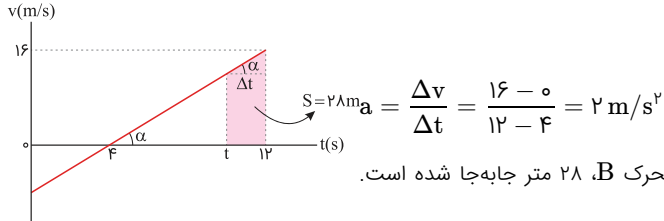
باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده ابتدا تندی متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$|v_A| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|64 - 28|}{12} = 3 \text{ m/s}$$

در این صورت تندی متحرک B برابر است با:

$$v_B = \frac{16}{3} |v_A| = \frac{16}{3} (3) = 16 \text{ m/s}$$

اکنون می‌توان نمودار سرعت- زمان مربوط به متحرک B که با شتاب ثابت حرکت می‌کند را رسم کرد:



باتوجه به نمودار، شتاب حرکت برابر است با:

$$S = 28 \text{ m/s}^2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16 - 0}{12 - 4} = 2 \text{ m/s}^2$$

باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده مشخص می‌شود از لحظه (t) تا لحظه t = 12 s متحرک B، 28 متر جابه‌جا شده است.

پس باتوجه به سطح زیر نمودار مشخص شده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} 28 &= \left(\frac{(16 - 2\Delta t) + 16}{2} \right) \Delta t \\ \Rightarrow 56 &= (32 - 2\Delta t) \Delta t \Rightarrow 56 = 32\Delta t - 2\Delta t^2 \\ \Rightarrow 2\Delta t^2 - 32\Delta t + 56 &= 0 \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s} \Rightarrow t = 12 - 2 = 10 \text{ s} \end{aligned}$$

در لحظه t = 10 s متحرک B از مبدأ عبور کرده و جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.

اکنون مکان متحرک A در این لحظه را حساب می‌کنیم:

$$x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = -3t + 64 = -3(10) + 64 = 34 \text{ m}$$

چون متحرک B در مبدأ قرار دارد، فاصله دو متحرک برابر 34 m است.

روش دوم:

ابتدا سرعت متحرک A را مشخص کرده و معادله حرکت آن را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{28 - 64}{12} = -3 \text{ m/s} \\ x_A &= v_A t + x_{0A} = -3t + 64 \end{aligned}$$

باتوجه به اطلاعات مربوط به نمودار در مورد متحرک B می‌توان نوشت:

$$\text{در لحظه ای که دو متحرک به هم می‌رسند } (t = 12 \text{ s}): v_B = \frac{16}{3} |v_A| = \frac{16}{3} (3) = 16 \text{ m/s}$$

$$4 \text{ s} \leq t \leq 12 \text{ s}: a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16 - 0}{8} = 2 \text{ m/s}^2$$

اکنون باتوجه به مشخص بودن شتاب حرکت، می‌توان سرعت اولیه متحرک B را مشخص کرد:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{0 - v_0}{4} \Rightarrow v_0 = -8 \text{ m/s}$$

با استفاده از معادله مکان- زمان می‌توان مکان اولیه را نیز مشخص کرد:

$$\begin{cases} x_B = t^2 - 8t + x_0 \\ t = 12 \text{ s} \\ x = 28 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow 28 = 144 - 96 + x_0 \Rightarrow x_0 = -20 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x_B = t^2 - 8t + 20$$

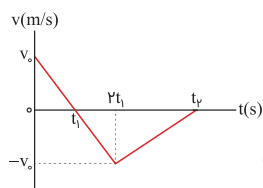
اکنون می‌توان لحظه تغییر جهت بردار مکان برای متحرک B را مشخص کرد:

$$x_B = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 20 = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

در این صورت فاصله دو متحرک برابر است با:

$$d = x_A - x_B = (-3t + 64) - 0 = -3(10) + 64 = 34 \text{ m}$$

از لحظه شروع حرکت تا لحظه φt_1 ، شتاب حرکت ثابت است. در این صورت مقادیر سرعت در ابتدای حرکت و لحظه φt_1 برابر است.



در این صورت می‌توان نوشت:

$$a_{1(o-\varphi t_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-v_o - v_o}{\varphi t_1} = \frac{-2v_o}{\varphi t_1} = -\frac{v_o}{t_1}$$

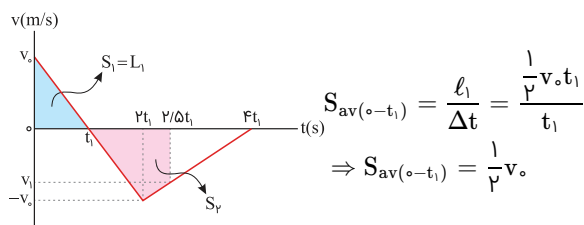
$$a_{\varphi(t_\varphi - \varphi t_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-v_o)}{t_\varphi - \varphi t_1} = \frac{v_o}{t_\varphi - \varphi t_1}$$

با استفاده از شرط سؤال داریم:

$$|a_1| = \varphi a_\varphi \Rightarrow \frac{v_o}{t_1} = \varphi \frac{v_o}{t_\varphi - \varphi t_1} \Rightarrow t_\varphi - \varphi t_1 = \varphi t_1$$

$$\Rightarrow t_\varphi = 2\varphi t_1$$

برای محاسبه تندی متوسط در بازه‌های زمانی خواسته شده می‌توان نوشت:



برای تعیین تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا $\varphi/\omega t_1$ ابتدا سرعت v_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{-v_o} = \frac{\varphi t_1 - \varphi/\omega t_1}{\varphi t_1 - \varphi t_1} \Rightarrow v_1 = -\frac{\varphi}{\varphi} v_o \text{ (شتاب در این بازه زمانی ثابت است)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S'_{av(t_1 - \varphi/\omega t_1)} = \frac{(\frac{v_o \times t_1}{\varphi}) + (\frac{v_o + \frac{\varphi}{\varphi} v_o}{\varphi} \times \varphi/\omega t_1)}{\varphi/\omega t_1 - t_1}$$

$$\Rightarrow S'_{av} = \frac{\omega}{\lambda} v_o$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

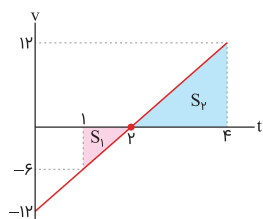
$$\frac{S_{av}}{S'_{av}} = \frac{\frac{v_o}{\varphi}}{\frac{\omega}{\lambda} v_o} = \frac{\varphi}{\omega}$$

روش اول:

معادله سرعت- زمان را به دست می‌آوریم:

$$x = \underbrace{3}_{\frac{1}{2}a} t^2 - \underbrace{12}_{v_0} t + 9 \xrightarrow{v=at+v_0} v = 6t - 12$$

نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم و سپس تندی متوسط را حساب می‌کنیم:



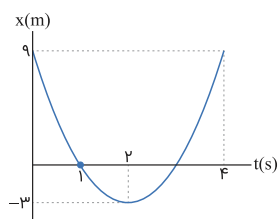
$$l = S_1 + S_2 = 3 + 12 = 15 \text{ m}$$

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{3-1} = 7.5 \text{ m/s}$$

روش دوم: نمودار سهمی را رسم می‌کنیم و مکان متحرک در لحظات $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 4 \text{ s}$ را نیز تعیین می‌کنیم:

$$x = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow t_{\text{رأس}} = \frac{-(-12)}{2(3)} = 2 \text{ s}, \quad x_{\text{رأس}} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m}$$

$$\begin{cases} x_{1s} = 3(1)^2 - 12(1) + 9 = 0 \\ x_{4s} = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m} \end{cases}$$



باتوجه به نمودار مسافت و تندی متوسط را حساب می‌کنیم.

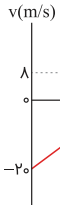
$$l = 3 + 3 + 9 = 15 \text{ m} \Rightarrow S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}$$

ابتدا با استفاده از نمودار سرعت-زمان، در بازه زمانی ۰ تا ۵s شیب خط را که همان شتاب است محاسبه می‌کنیم که برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-20)}{5} = 4 \text{ m/s}^2$$

باتوجه به نمودار، شیب در بازه زمانی صفر تا t ثابت است، پس:

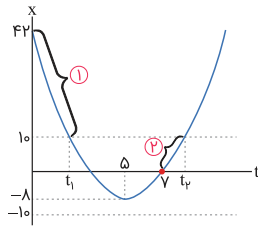
$$4 = \frac{\lambda - (-20)}{t} \Rightarrow t = 7s$$



حال مکان متحرک در لحظه $t = 5s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(4)(5)^2 + (-20)(5) + 42 \Rightarrow x = -8 \text{ m}$$

سپس نمودار مکان-زمان آن را رسم می‌کنیم.



طبق نمودار، کافی است زمان‌هایی که متحرک در بازه‌های t_1 تا t_2 حرکت می‌کند را محاسبه کنیم:

$$\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 10 - 42 = 2t_1^2 - 20t_1 \Rightarrow t_1 = 2s$$

$$\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x = v t \Rightarrow 10 - 0 = 4(t_2 - 7) \Rightarrow t_2 = 9.5s$$

پس در $t_2 - t_1 = 6/25s$ فاصله متحرک تا مبدأ، کمتر یا مساوی ۱۰ بوده است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

باتوجه به نمودار، در ۲۰ ثانیه اول حرکت، مقدار تغییرات سرعت برابر است با $20 \times 10 = 200 \text{ m/s}$ ؛ یعنی سرعت در لحظه $t_1 = 20s$ ، 200 m/s است (مساحت زیر نمودار $a-t$ ، برابر تغییرات سرعت است) از لحظه $t_1 = 20s$ به بعد، شتاب 2 m/s^2 است؛ پس داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 20$$

متحرک در لحظه‌ای (لحظه‌هایی) تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر می‌شود، بنابراین:

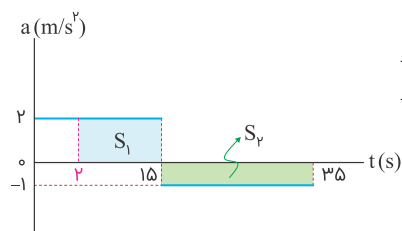
$$v = 0 \Rightarrow 2t - 20 = 0 \Rightarrow t = 10s$$

پس متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد (در لحظه $t = 10s$).

t	10
V	- 0 +

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

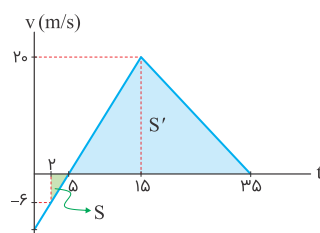
مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان با تغییرات سرعت (Δv) برابر است.



$$v_{15} - v_2 = S_1 \Rightarrow v_{15} - (-6) = 26 \Rightarrow v_{15} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{35} - v_{15} = S_2 \Rightarrow v_{35} - 20 = -20 \Rightarrow v_{35} = 0$$

حالا می‌توانیم با رسم نمودار سرعت - زمان جابه‌جایی را از ۲ تا ۱۵ ثانیه به دست آوریم:



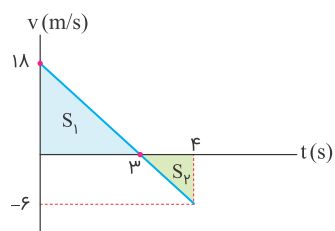
$$\Delta x = S + S'$$

$$\Delta x = \frac{3 \times (-6)}{2} + \frac{20 \times 20}{2} = 291 \text{ m}$$

$$x_{35} - (-16) = 291 \Rightarrow x_{35} = 275 \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

ابتدا نمودار سرعت - زمان را در مدت موردنظر با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:



$$v = -6t + 18$$

$$|S_1| = \frac{18 \times 3}{2} = 27 \text{ m}$$

$$|S_2| = \frac{6 \times 1}{2} = 3 \text{ m}$$

$$\ell = |S_1| + |S_2| = 27 + 3 = 30 \text{ m}$$

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

با توجه به نمودار، متحرک در $t = ۵$ s متوقف می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = ۵a + v_0 \Rightarrow v_0 = -۵a$$

معادله مکان - زمان را می‌نویسیم و دو لحظه $t = ۱$ s و $t = ۱۲$ s را در آن جایگذاری می‌کنیم. دقت کنید $v_0 = -۵a$ است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} ۶۶ = \frac{1}{2}a - ۵a + x_0 \\ 0 = \frac{1}{2}a \times ۱۴۴ - ۵a \times ۱۲ + x_0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} \begin{cases} ۶۶ = -\frac{9}{2}a + x_0 & (I) \\ 0 = ۱۲a + x_0 \Rightarrow a = -\frac{x_0}{۱۲} & (II) \end{cases}$$

رابطه (II) را در (I) جایگذاری می‌کنیم:

$$۶۶ = \frac{9x_0}{۲۴} + x_0 \Rightarrow ۶۶ = \frac{۳۳x_0}{۲۴} \Rightarrow x_0 = ۴۸ \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

اگر جابه‌جایی در ۴ ثانیه اول حرکت X_1 باشد، جابه‌جایی در ۴ ثانیه دوم $X_1 + ۱۶a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه سوم $X_1 + ۳۲a$ و جابه‌جایی در چهار ثانیه چهارم $X_1 + ۴۸a$ است. با توجه به صورت سؤال می‌توان نوشت:

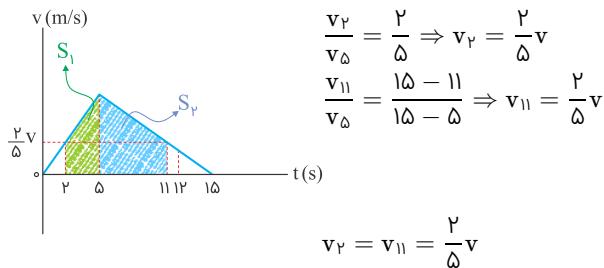
$$X_1 = (X_1 + ۱۶a) + (X_1 + ۳۲a) + (X_1 + ۴۸a)$$

$$\xrightarrow{X_1 = ۲۰۰ \text{ m}} ۲۰۰ = ۶۰۰ + ۹۶a \Rightarrow a = -\frac{۴۰۰}{۹۶} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{۴۰۰}{۹۶} = \frac{۲۵}{۶} \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

با رسم نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت جسم می‌توان نوشت:



در این صورت خواهیم داشت:

باتوجه به جابه‌جایی انجام‌شده بین دو لحظه $t_1 = ۲$ s تا $t_2 = ۱۱$ s داریم:

$$S_1 + S_2 = ۱۲۶ \Rightarrow \left(\frac{2}{5}v + v\right) \times \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{5}v + v\right) \times \left(\frac{11-5}{2}\right) = ۱۲۶$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5}v \left(\frac{3}{2} + ۳\right) = ۱۲۶ \Rightarrow ۶/۳v = ۱۲۶ \Rightarrow v = ۲۰ \text{ m/s}$$

برای محاسبهٔ تندی در لحظهٔ $t = ۱۲$ s داریم:

$$\frac{v_{12}}{v_5} = \frac{15-12}{15-5} \Rightarrow v_{12} = \frac{3}{10}v = \frac{3}{10} \times ۲۰ = ۶ \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

در لحظه $t = ۴ \text{ s}$ سرعت حرکت صفر می‌شود. چون حرکت از این لحظه به بعد از حال سکون انجام می‌شود، می‌توان حرکت را وارونه در نظر گرفت. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} v_{\text{پ}} = ۲a + v_{\text{ف}} \\ v_{\text{ا}} = ۴a + v_{\text{ف}} \end{array} \right\} \xrightarrow{v_{\text{ف}}=0} \frac{v_{\text{ا}}}{v_{\text{پ}}} = \frac{۴a}{۲a} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

جهت حرکت جسم تغییر نکرده است و حرکت تندشونده می‌باشد، در این صورت مسافت و جابه‌جایی برابر هستند. پس می‌توان نوشت:

$$x_1 + (x_1 + at^{\text{پ}}) = (x_1 + ۲at^{\text{پ}}) + ۴ \Rightarrow ۲x_1 + a = x_1 + ۲a + ۴ \\ \Rightarrow x_1 = a + ۴ = ۴ + ۴ = ۸ \text{ m}$$

با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{۲}at^{\text{پ}} + v_0t \Rightarrow ۸ = \frac{1}{۲} \times ۴ \times ۱^{\text{پ}} + v_0 \times ۱ \\ \Rightarrow v_0 + ۲ = ۸ \Rightarrow v_0 = ۶ \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

حرکت از ۳ مرحله تشکیل شده که در مراحل ۱ و ۳ شتاب و زمان مساوی است.

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = ۲0 \times ۲5 = 500 \text{ m} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 500 \Rightarrow \frac{1}{۲}at_1^2 + vt_2 + \frac{1}{۲}at_3^2 + vt_3 = 500 \\ \xrightarrow{t_1=t_3, t_2=۲5-t_1} \frac{1}{۲}(5)t_1^2 + v(۲5 - ۲t_1) + \frac{1}{۲}(-5)t_1^2 + vt_1 = 500 \Rightarrow v(۲5 - ۲t_1) = 500 \quad (۱)$$

حرکت در مرحلهٔ دوم یکنواخت است و سرعت متحرک در طول این مرحله برابر است با سرعت نهایی متحرک در مرحلهٔ اول یعنی:

$$v = at_1 = 5t_1 \quad (۲)$$

سرعت در مرحلهٔ دوم حرکت، برابر با مقدار نهایی سرعت در مرحلهٔ اول حرکت است

پس با جایگذاری (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} 5t_1(۲5 - t_1) = 500 \\ \Rightarrow t_1^2 - ۲5t_1 + ۱00 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۲0 \text{ s} \\ t_1 = 5 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow t_2 = ۲5 - ۲(5) = ۱5 \text{ s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s مسافت طی‌شده بیش از دو برابر مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی ۶ s تا ۱۰ s است، درحالی‌که بازهٔ زمانی آن دو برابر بازهٔ زمانی ۶ s تا ۱۰ s است؛ بنابراین در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s تندی متوسط بیشتر از بازهٔ زمانی ۶ s تا ۱۰ s است. علاوه بر این برای مقایسهٔ گزینهٔ (۲) و (۳) بخشی از مسیر هر دو گزینه یکسان است (یعنی بازهٔ ۲ تا ۶ ثانیه) پس کافی است بازهٔ زمانی صفر تا ۲ s را با ۶ s تا ۱۰ s مقایسه کنیم. باتوجه‌به نمودار، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی ۶ s تا ۱۰ s بیش از دو برابر مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ s است. پس تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s بیشتر است.

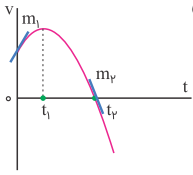
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

علت نادرستی گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم:

(۱) در بازه زمانی صفر تا t_1 تندی در حال افزایش است.

(۲) شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ نشان‌دهنده شتاب متحرک است. بزرگی شیب خط مماس در لحظه t_2 ، بیشتر از بزرگی شیب خط مماس در لحظه t_1 است.

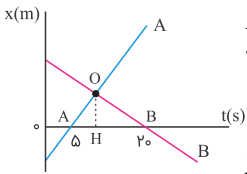
(۳) قبل از لحظه t_1 شتاب در جهت محور x است چون شیب خط مماس مثبت است و پس از لحظه t_1 شتاب در خلاف جهت محور x است چون شیب خط مماس منفی است.



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

راه‌حل اول:

در مثلث OAB شیب خط OA دو برابر بزرگی شیب خط OB است بنابراین $HB = 2AH$ است پس:



$$AH + HB = 15$$

$$3AH = 15 \Rightarrow AH = 5$$

بنابراین دو متحرک در لحظه $t = 10s$ به هم می‌رسند.

چون در ابتدا از هم $150m$ فاصله داشته‌اند و پس از $10s$ به هم رسیده‌اند پس $10s$ ثانیه بعد (یعنی لحظه $t = 20s$) فاصله آن‌ها از هم باز هم $150m$ است.

راه‌حل دوم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{oA} \\ x_B = -|v_B| t + x_{oB} \end{cases} \xrightarrow{v_A = |v_B|} x_A = 2|v_B| \times 10 + x_{oA}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow 2|v_B| \times 10 + x_{oA} = -|v_B| \times 10 + x_{oB}$$

$$\Rightarrow 3|v_B| = x_{oB} - x_{oA} = 150$$

$$\Rightarrow |v_B| = 50 \text{ m/s}, v_A = 100 \text{ m/s}$$

حال معادله مکان-زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم و فاصله آن‌ها را در لحظه $t = 20s$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_A = 100t + x_{oA} \\ x_B = -50t + x_{oB} \end{cases} \xrightarrow{t=20s} x_A - x_B = (100 \times 20 + x_{oA}) - (-50 \times 20 + x_{oB})$$

$$\Rightarrow x_A - x_B = 3000 - 1500 = 1500 \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$-۴ = \frac{v_{10} - v_0}{10 - 0} \Rightarrow v_{10} - v_0 = -20 \text{ m/s} \quad (\text{I})$$

$$۲ = \frac{v_{12} - v_{10}}{12 - 10} \Rightarrow v_{12} - v_{10} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{II})$$

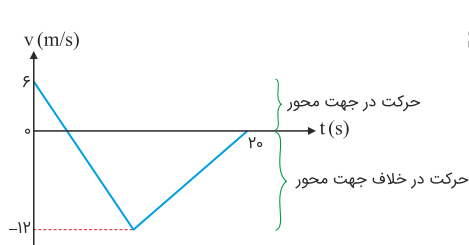
دو معادله (I) و (II) را باهم جمع می‌کنیم:

$$(\text{I}) + (\text{II}) = v_{12} - v_0 = 4 - 20 = -16 \text{ m/s}$$

حال شتاب متوسط در بازه زمانی $5s$ تا $12s$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{v_{12} - v_0}{12 - 0} = \frac{-16}{12} \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت مثلث پایین}}{\Delta t}$$

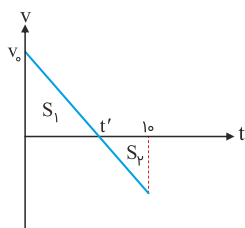
$$= \frac{\frac{1}{2} \times 12 \times (20 - 0)}{20 - 0} = 6 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$v_0 > 0 \rightarrow \vec{v}_{av} = v / \underbrace{\Delta t}_{10 \text{ s}} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{x} = v \Delta t \Rightarrow \Delta x = +75 \text{ m}$$

$$S_{av} = \underbrace{\frac{\ell}{\Delta t}}_{10} = 8/5 \text{ m/s} \Rightarrow \ell = 85 \text{ m}$$

چون حرکت با شتاب ثابت است پس نمودار $v - t$ آن خطی (شیب ثابت) است. چون تندی متوسط از بزرگی سرعت متوسط بیشتر است پس حتماً تغییر جهت داشته‌ایم و در نتیجه نمودار نزولی بوده و در یک لحظه از محور t گذشته است.



$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی} = S_1 - S_2 = 75 \\ \text{مسافت طی‌شده} = S_1 + S_2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 80 \text{ m} \\ S_2 = 5 \text{ m} \end{cases}$$

تکنیک حرکت معکوس از t' تا صفر برای حذف v_0 :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 80 = \frac{1}{2} a (t')^2 \\ S_2 &= 5 = \frac{1}{2} a (10 - t')^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \frac{80}{5} = \left(\frac{t'}{10 - t'} \right)^2 \Rightarrow t' = 8 \text{ s}$$

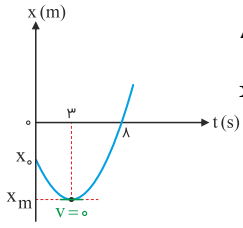
$$\Rightarrow v_0 = 20 \text{ m/s}, S_1 = 80$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 20}{8} = -2/5$$

$$\ell = \Delta x_{0-2} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = 35 \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

از ۰ تا ۳ s تا ۸ s داریم:



$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + v_0 t$$

$$x_m = \frac{1}{\gamma} a(\delta)^{\gamma} + 0$$

از ۰ تا ۳ s (تکنیک حرکت به طور معکوس):

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + 0 \Rightarrow x_m - x_0 = \frac{1}{\gamma} a(3)^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} a(\delta)^{\gamma} - |x_0| = \frac{1}{\gamma} a(3)^{\gamma} \Rightarrow |x_0| = \frac{1}{\gamma} a(2\delta) - \frac{1}{\gamma} a(9) = 8a$$

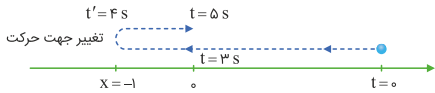
$$\Rightarrow x_0 = -8a$$

$$\vec{d} = \text{جاب‌جایی} = \Delta x = x_{\gamma} - x_1 = 0 - x_0 = 8a$$

$$\ell = \text{مسافت طی‌شده} = (x_m - x_0) + (x_m - 0) = \frac{1}{\gamma} a \times 9 + \frac{1}{\gamma} a \times 2\delta = 17a$$

$$\frac{\vec{d}}{\ell} = \frac{8a}{17a} = \frac{8}{17}$$

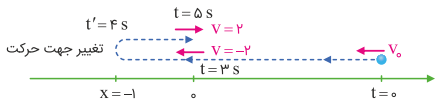
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰



$$\Rightarrow t' = \frac{3 + \delta}{\gamma} = 4 s$$

$$\Delta x_{(\delta s \text{ تا } 4 s)} = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + v_0 t \Rightarrow 1 = \frac{1}{\gamma} a(4)^{\gamma} + 0 \Rightarrow a = 2 m/s^{\gamma}$$

$$v = at + v_0 = 2 \times 1 + 0 = 2 m/s$$

پس سرعت در لحظه $t = 3 s$ برابر با $2 m/s$ است. (تقارن سهمی در حرکت شتابدار با شتاب ثابت)

در نهایت به بررسی حرکت در بازه ۰ تا ۳ می‌پردازیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow -2 = 2(3) + v_0 \Rightarrow v_0 = -8 m/s$$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + v_0 t = \frac{1}{\gamma} \times 2 \times (3)^{\gamma} + (-8)(3) = -15 m$$

$$\ell_{\delta s \text{ تا } 0 s} = 15 + 1 + 1 = 17 m$$

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{17}{\delta} m/s$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

معادله حرکت جسم را با معادله مکان- زمان مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۰/\Delta t \\ x = \frac{1}{۲}at^۲ + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \text{ m/s}^۲ \\ x_0 = ۱۰/\Delta \text{ m/s} \\ v_0 = -۱۲ \text{ m/s} \end{cases}$$

معادله سرعت- زمان متحرک را نوشته و در بازه زمانی ۲s تا ۴s، مدت زمانی که سرعت متحرک منفی است را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = ۴t - ۱۲ \xrightarrow{v=0} 0 = ۴t - ۱۲ \Rightarrow t = ۳s$$



قسمت‌هایی که علامت سرعت منفی است، متحرک برخلاف جهت محور X حرکت کرده است.

بنابراین در بازه زمانی ۲ تا ۴ ثانیه، متحرک ۱ ثانیه در خلاف جهت محور X حرکت کرده است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول:

سرعت اولیه هر دو جسم صفر است.

چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند و به یک مقصد معین می‌رسند، پس جابه‌جایی آن‌ها یکسان است:

$$\Delta x_1 = \Delta x_۲$$

$$\Rightarrow \frac{1}{۲}a_1t_1^۲ = \frac{1}{۲}a_۲t_۲^۲ \quad (۱)$$

گام دوم: متحرک شماره (۱) که شتاب بیشتری دارد ۲s زودتر به مقصد رسیده، پس:

$$t_1 = t_۲ - ۲ \quad (۲)$$

گام سوم: چون زمان حرکت متحرک شماره (۱) را می‌خواهیم $t_۲$ را از رابطه (۲) در رابطه (۱) قرار می‌دهیم و t_1 را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} a_1t_1^۲ = \frac{۹}{۱۶}a \times (t_1 + ۲)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶} = \left(\frac{t_1}{t_1 + ۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{t_1}{t_1 + ۲}$$

$$\Rightarrow ۴t_1 = ۳t_1 + ۶ \Rightarrow t_1 = ۶s$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

طبق تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۶ - ۰}{۴ - ۱} = -۲ \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) فاصله $\Delta x_{A-B} = \lambda \circ m \leftarrow B$ تا A

ب) در مدت $\Delta t = \lambda s \leftarrow$ می کند

ج) در لحظه رسیدن به نقطه B سرعتش به $15 m/s$ می رسد $\leftarrow v_B = 15 m/s$

د) شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $\leftarrow a =$

گام دوم

روش اول:

ابتدا v_A را از رابطه $v_{av} = \frac{v_A + v_B}{2}$ محاسبه کرده و سپس با استفاده از معادله $v_B = at + v_A$ ، شتاب را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{\lambda \circ}{\lambda} \Rightarrow v_A = 5 m/s$$

$$v_B = at + v_A \Rightarrow 15 = a \times \lambda + 5 \Rightarrow a = \frac{5}{\text{f}} m/s^2$$

روش دوم:

اگر حرکت متحرک را از B به سمت A در نظر بگیریم. سرعت اولیه همان v_B می شود ولی در جهت منفی و با استفاده از رابطه $\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ و جایگذاری داده ها به راحتی شتاب به دست می آید.

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ \Delta x = x_A - x_B = -\lambda \circ \Rightarrow -\lambda \circ = \frac{1}{2}a \times (\lambda)^2 - 15 \times \lambda \Rightarrow a = \frac{5}{\text{f}} m/s^2 \\ v_{0B} = v_B = -15 m/s \end{cases}$$

گام اول: جابه جایی متحرک را در بازه زمانی $1s$ تا $6s$ به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = 3 \times 5 = 15 m$$

چون متحرک تغییر جهت داشته پس مسافت بزرگتر از جابه جایی است؛ بنابراین گزینه های ۱ و ۲ نمی توانند درست باشند.

گام دوم: جابه جایی متحرک را در بازه های زمانی یک ثانیه ای بررسی می کنیم. چون سرعت در $t = 2s$ صفر است، اگر جابه جایی در ثانیه سوم d باشد در ثانیه های بعدی مضرب فردی از d است:

$$\Delta x_1 = -\vec{d} \quad \text{بازه زمانی } 1s \text{ تا } 2s$$

$$\Delta x_2 = \vec{d} \quad \text{بازه زمانی } 2s \text{ تا } 3s$$

$$\Delta x_3 = 3\vec{d} \quad \text{بازه زمانی } 3s \text{ تا } 4s$$

$$\Delta x_4 = 5\vec{d} \quad \text{بازه زمانی } 4s \text{ تا } 5s$$

$$\Delta x_5 = 7\vec{d} \quad \text{بازه زمانی } 5s \text{ تا } 6s$$

گام سوم: d را به دست می آوریم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5$$

$$15 = -d + d + 3d + 5d + 7d \Rightarrow 15 = 15d \Rightarrow d = 1 m$$

گام چهارم: مسافت طی شده را محاسبه می کنیم:

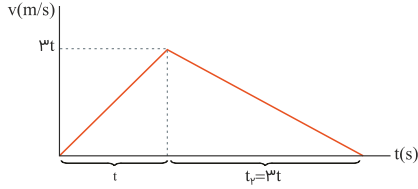
$$\ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5|$$

$$\ell = 1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 17 m$$

گام اول: ابتدا نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم. اگر مدت‌زمان حرکت متحرک با شتاب ۳ m/s^2 برابر با t باشد، سرعت متحرک در انتهای حرکت با شتاب ۳ m/s^2 ، طبق رابطه $v = at + v_0 = 3t + 0 = 3t$ می‌رسد. در مرحله دوم که حرکت با شتاب ۱ m/s^2 کند می‌شود، متحرک پس از مدت Δt می‌ایستد که Δt از رابطه $v = at + v_0$ به دست می‌آید. توجه کنید که سرعت اولیه مرحله دوم، سرعت انتهای قسمت اول است و سرعت انتهای این قسمت برابر با صفر است؛ بنابراین مدت حرکت قسمت دوم حرکت برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -1 \times t_p + 3t \Rightarrow t_p = 3t$$

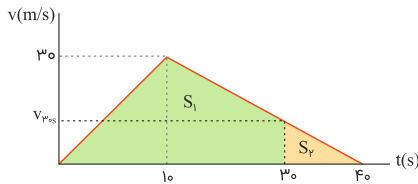
بنابراین نمودار سرعت زمان متحرک به صورت شکل زیر است:



گام دوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک که همان مساحت سطح زیر نمودار است، برابر با ۶۰۰ m است؛ بنابراین t برابر است با:

$$S = 600 \Rightarrow \frac{3t \times 4t}{2} = 600 \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

گام سوم: برای محاسبه مسافت طی‌شده در $(۰, ۳۰ \text{ s})$ کافی است، مساحت سطح زیر نمودار را در این بازه به دست بیاوریم؛ یعنی S_1 .



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{در مرحله دوم}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{v_{30s} - 30}{30 - 10} \Rightarrow v_{30s} = 10 \text{ m/s}$$

$$S_1 = S_{\text{کل}} - S_2 = \frac{30 \times 40}{2} - \frac{10 \times 10}{2} = 550 \text{ m}$$

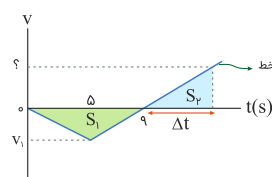
باتوجه به اینکه در بازه $(fs, ۱۲s)$ ، جابه‌جایی دو متحرک باهم برابر است، سرعت متوسط این دو متحرک نیز باهم برابر است.

$$v_{av}(B) = v_A$$

در حرکت شتاب ثابت سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 با سرعت متوسط متحرک در وسط بازه یعنی لحظه $\frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است.

$$\text{بنابراین در لحظه } t = \frac{۴ + ۱۲}{2} = ۸ \text{ s} \text{ سرعت متوسط B با سرعت A برابر است.}$$

چون متحرک از $x = 0$ شروع به حرکت کرده است و مجدداً می‌خواهد به $x = 0$ برسد، جابه‌جایی متحرک باید صفر باشد. جابه‌جایی در نمودار $(v - t)$ برابر با مجموع جبری مساحت‌های زیر نمودار $(v - t)$ است؛ بنابراین مساحت سطح پایین محور t باید با مساحت بالای محور t برابر باشد. اگر لحظهٔ برابری این دو مساحت را t در نظر بگیریم، داریم:



شیب خط $= \frac{0 - (-v_1)}{9 - 0} = \frac{v_1}{9}$

$? = \frac{v_1}{9} \times \Delta t$

$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{v_1 \times 9}{2} = \frac{\frac{v_1}{9} \Delta t \times \Delta t}{2} \Rightarrow \Delta t = 6 \text{ s}$

$$t = 9 + \Delta t = 9 + 6 = 15 \text{ s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{10s} - x_0}{10 - 0} = \frac{20 - (-40)}{10} = 6 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_{(v-t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{v_{max} \times 20}{2}}{20} = \frac{v_{max}}{2} = 10 \Rightarrow v_{max} = 20 \text{ m/s}$$

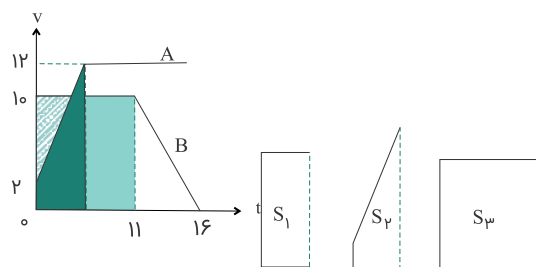
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

گام اول

الف) در لحظه $t = 0$ هر دو در مکان $x = 0 \leftarrow x_{0A} = x_{0B} = 0$
 ب) چند ثانیه پس از $t = 0$ دو متحرک به هم می‌رسند؟ $t = ?$, $x_A = x_B$

گام دوم

مطابق نمودار $v - t$ داده شده و باتوجه به گزینه‌ها مسئله را از لحظه $t = 5s$ به بعد بررسی می‌کنیم؛ یعنی در حالت اول، از لحظه $t = 5s$ تا $t = 11s$ معادله مکان آن‌ها را مساوی قرار می‌دهیم و در حالت دوم از لحظه $t = 11s$ به بعد معادله مکان آن‌ها را باهم برابر می‌گذاریم:



معادله مکان دو متحرک A و B را در حالت اول ($t_1 = 5s$) نوشته و باهم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_{1A} = |S_1| \\ S_1 = \frac{2+12}{2} \times 5 = 35 \end{cases} \Rightarrow x_{1A} = 35m \xrightarrow{v_A=12m/s} x_A = 12t + 35$$

$$\begin{cases} x_{1B} = |S_2| \\ S_2 = 10 \times 5 = 50 \end{cases} \Rightarrow x_{1B} = 50m \xrightarrow{v_B=10m/s} x_B = 10t + 50$$

$$\Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow 12t + 35 = 10t + 50 \Rightarrow t = 7/5s \quad \text{یعنی } 7/5s \text{ بعد از لحظه } t = 5s$$

این یعنی $7/5$ ثانیه بعد از لحظه $t = 5s$ که چون بازه زمانی در این مرحله $6s = 11 - 5$ است؛ پس در این حالت، دو متحرک به هم نمی‌رسند.

حالا معادله مکان دو متحرک از $t = 11s$ به بعد را مساوی قرار می‌دهیم:

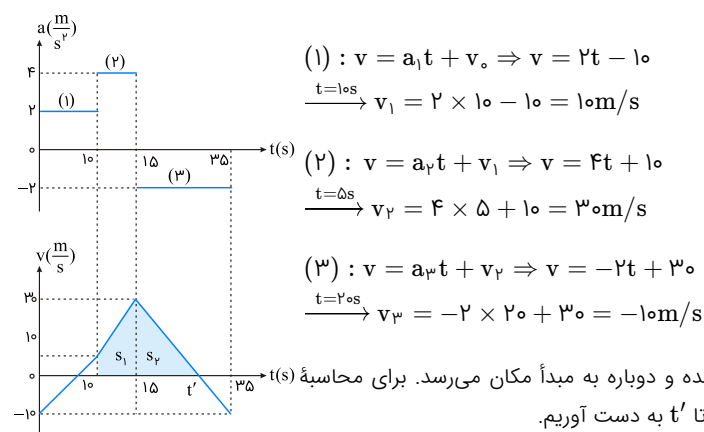
$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \\ x_{0A} = S_1 + S_2 = 35 + 72 = 107 \Rightarrow x_A = 12t + 107 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x_{0B} = S_3 = 110m, a = -\frac{10}{16-11} = -2m/s^2, v_{0B} = 10m/s \\ x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_{0B}t + x_{0B} \Rightarrow x_B = -t^2 + 10t + 110 \end{cases} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} x_A = x_B \Rightarrow 12t + 107 = -t^2 + 10t + 110 \Rightarrow t = 1s$$

۱ ثانیه بعد از لحظه $t = 11s$ یعنی $12s = 11 + 1$ ثانیه بعد از $t = 0$ است.

باتوجه به نمودار شتاب- زمان، نمودار سرعت- زمان را رسم کرده و از طریق مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ در بازه زمانی داده شده را محاسبه می‌کنیم:



$$(۳) : v = -2t + 70 \Rightarrow 0 = -2t + 70 \Rightarrow t = 35s$$

یعنی در لحظه $t' = 15 + 15 = 30s$ سرعت در مرحله سوم صفر می‌شود.

$$|\Delta x| = S_1 + S_2 = \left[\frac{10 + 70}{2} \times (15 - 10) \right] + \left[\frac{70 \times (70 - 15)}{2} \right] = (20 \times 5) + (15 \times 15) = 325m$$

گام اول

الف) قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت ۴۰ m/s ← ۴۰ m/s

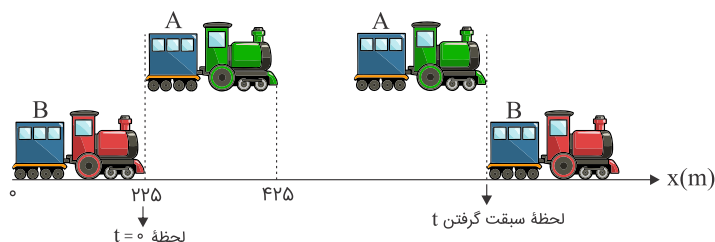
ب) قطار B به طول ۲۲۵ متر هنگامی که قطار A از آن عبور می‌کند با شتاب ثابت ۲ m/s^۲ در همان جهت به راه می‌افتد
 $v_{0B} = 0$, $a_B = +2 \text{ m/s}^2$, $x_{0A} = 225 \text{ m}$ ←

ج) قطار B سرعت خود را به ۵۰ m/s می‌رساند ← $v_{1B} = 50 \text{ m/s}$

د) قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و کاملاً از آن عبور می‌کند ← $t_{\text{سبقت}} = ?$

گام دوم

باتوجه به شکل، برای ابتدای هر قطار معادله‌ها را نوشته و سبقت t را به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله سرعت- زمان، زمانی که سرعت قطار B، ۵۰ m/s می‌شود (t_1) را محاسبه می‌کنیم:



$$v_B = a_B t_1 + v_{0B} \Rightarrow 50 = 2 t_1 \Rightarrow t_1 = 25 \text{ s}$$

از لحظه $t_1 = 25 \text{ s}$ به بعد، قطار B با سرعت ثابت ۵۰ m/s به حرکت خود ادامه می‌دهد. در این لحظه مکان قطار A و B را به کمک معادله مکان آن‌ها می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_1 + x_{0A} \Rightarrow x_A = 1225 \text{ m} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t_1^2 + v_{0B} t_1 + x_{0B} \Rightarrow x_B = 625 \text{ m} \end{cases}$$

از این پس دو قطار با سرعت ثابت ۴۰ m/s, ۵۰ m/s حرکت می‌کنند و با توجه به رابطه $x_B - x_A = 200 \text{ m}$ (لحظه‌ای که قطار B از A کاملاً عبور کرده) زمان سبقت را به دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t_2 + x_{0A} \Rightarrow x_A = 40 t_2 + 1225$$

$$x_B = v_B t_2 + x_{0B} \Rightarrow x_B = 50 t_2 + 625$$

$$(50 t_2 + 625) - (40 t_2 + 1225) = 200 \Rightarrow t_2 = 80 \text{ s}$$

در نهایت زمان سبقت از لحظه شروع حرکت برابر است با:

$$t_{\text{سبقت}} = t + t_2 = 25 + 80 = 105 \text{ s}$$

گزینه ۲

با دو بار استفاده از معادله مستقل از زمان برای حرکت شتاب ثابت، داریم:

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 10^2 = 2(-2) \times 25 \Rightarrow v = 0 \\ \Rightarrow v'^2 - v^2 &= 2a\Delta x \Rightarrow v'^2 - 0 = 2(2)(61 - 25) \Rightarrow v' = 12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

گزینه ۱

به دلیل تقارن سهمی می‌توان گفت در لحظه $t = 4 \text{ s}$ سرعت متحرک صفر می‌شود (رأس سهمی).

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 24 - 16 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$$

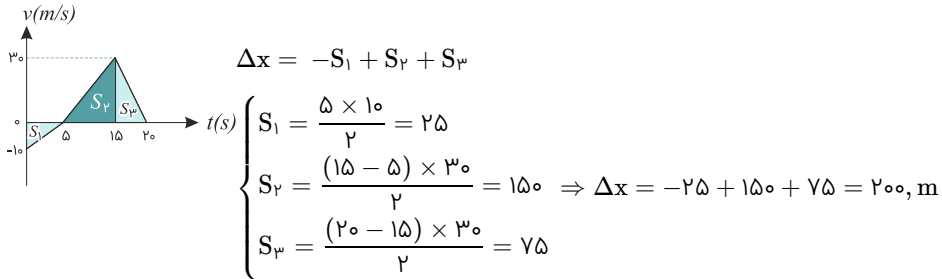
$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 4 + 4 \Rightarrow a = -1 \text{ m/s}^2$$

گام اول

سرعت متوسط جسم در مدت ۲۰ ثانیه نشان داده شده ؟ $\leftarrow \Delta t = 20 \text{ s}, v_{av} = ?$

گام دوم

برای محاسبه سرعت از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. باتوجه به این نکته که مساحت زیر نمودار برابر با مقدار جابه‌جایی است جابه‌جایی را به دست آورده و در رابطه بالا جاگذاری می‌کنیم (دقت شود که S_1 پایین محور t است، پس مقدارش منفی است).



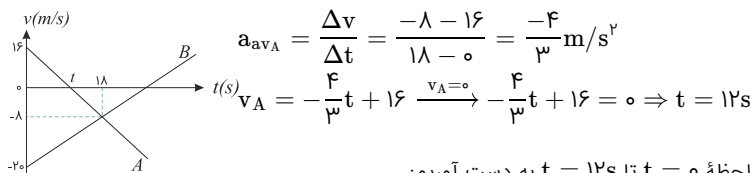
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m/s}$$

گام اول

الف) در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده $v_A > 0 \leftarrow$
 ب) بزرگی جابه‌جایی متحرک B، چند متر است؟ $\leftarrow |\Delta x_B| = ?$

گام دوم

ابتدا معادله سرعت- زمان متحرک A را به دست آورده و سپس مدت‌زمانی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده را محاسبه می‌کنیم:



حال کافی است معادله مکان- زمان متحرک B را نوشته و بزرگی جابه‌جایی آن را از لحظه $t = 0$ تا $t = 12 \text{ s}$ به دست آوریم:

$$a_{avB} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10 + 20}{18 - 0} = \frac{10}{18} \text{ m/s}^2$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + (v_0)_B t + (x_0)_B \Rightarrow \Delta x_B = \frac{1}{2} \times \frac{10}{18} \times (12)^2 + (-20) \times (12)$$

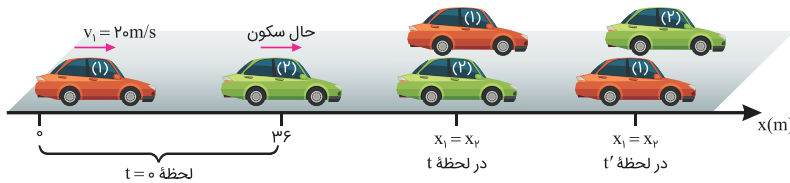
$$\Rightarrow \Delta x_B = 40 - 240 = -190 \Rightarrow |\Delta x_B| = 190 \text{ m}$$

گام اول

- الف) اتومبیلی با سرعت ۲۰ m/s ← سرعت ثابت و $v_1 = ۲۰\text{ m/s}$, $a_1 = ۰$
 ب) از ۳۶ متر جلوتر اتومبیلی با شتاب ثابت ۲ m/s^2 از حال سکون در همان جهت ← $v_{o2} = ۰$, $a_2 = ۲\text{ m/s}^2$, $x_{o2} = ۳۶\text{ m}$
 ج) دو بار از هم سبقت می‌گیرند ← دو بار مختصات مکانی آن‌ها برابر می‌شود.
 د) فاصله زمانی این دو سبقت ؟ ← $t'' - t = ?$

گام دوم

معادله مکان هر اتومبیل را می‌نویسیم و مساوی هم قرار می‌دهیم تا زمان‌های سبقت گرفتن از هم به دست آید:



$$\text{اتومبیل ۱، سرعت ثابت} : x_1 = v_1 t + x_o \xrightarrow{x_o=0} x_1 = 20t$$

$$\text{اتومبیل ۲، شتاب ثابت} : x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_{o2} t + x_o = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 + 36 \rightarrow x_2 = t^2 + 36$$

$$x_1 = x_2 \rightarrow 20t = t^2 + 36 \rightarrow \begin{cases} t = 2\text{ s} \\ t'' = 18\text{ s} \end{cases}$$

پس فاصله زمانی بین این دو سبقت برابر است با:

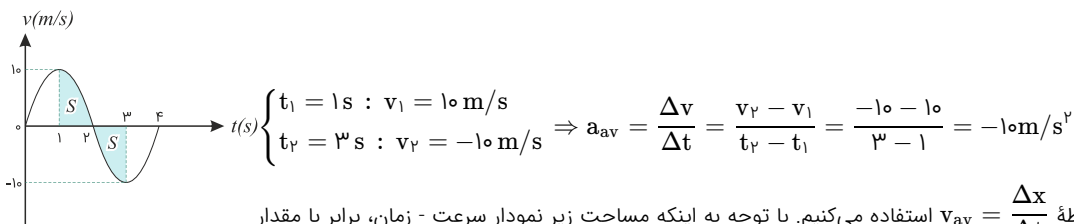
$$t'' - t = 18 - 2 = 16\text{ s} \quad \text{فاصله زمانی دو سبقت}$$

گام اول

$$\begin{cases} t_1 = 1\text{ s} \\ t_2 = 3\text{ s} \end{cases} : a_{av} = ? , v_{av} = ? \leftarrow \text{شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازه ۱ تا ۳ ثانیه}$$

گام دوم

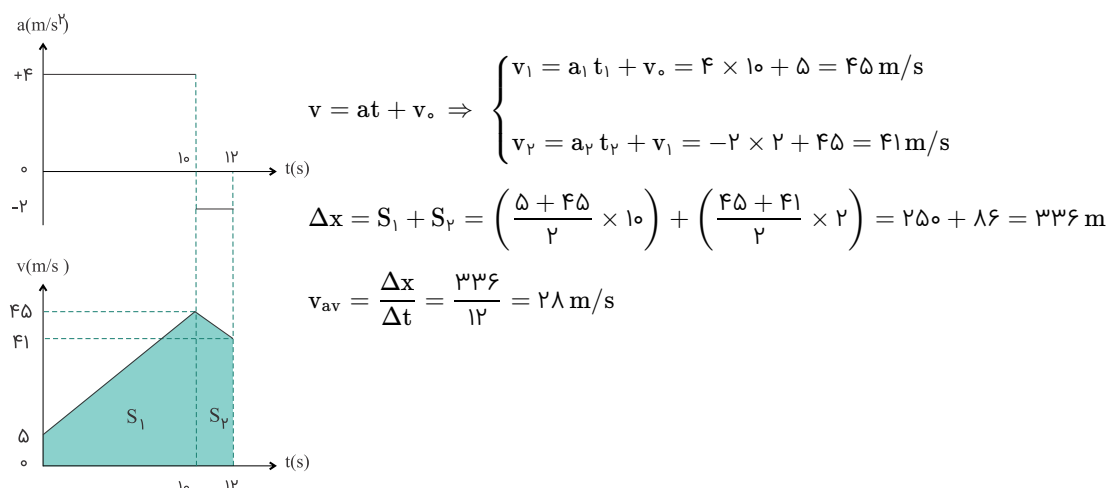
شتاب را از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم که مقادیر آن همگی از روی نمودار مشخص است.



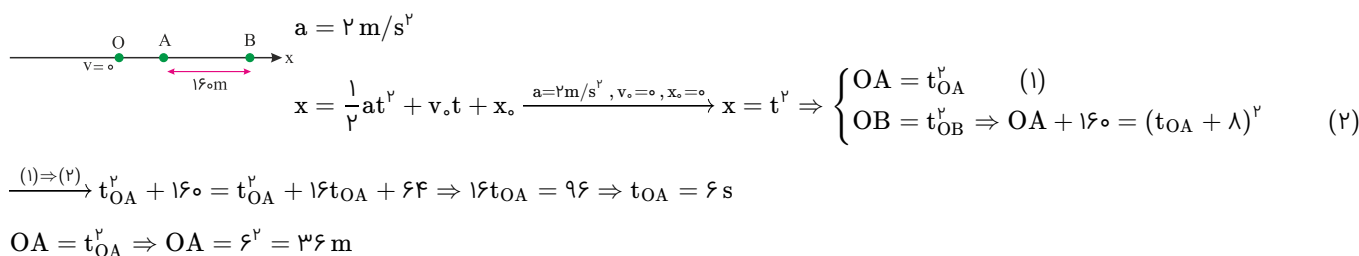
برای به دست آوردن سرعت متوسط از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، برابر با مقدار جابجایی است، جابجایی از $t = ۲\text{ s}$ تا $t = ۳\text{ s}$ برابر صفر است، در نتیجه سرعت متوسط صفر است.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{2} = 0\text{ m/s}$$

برای محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه، نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و از روی نمودار سرعت- زمان، مقدار جابه‌جایی و در نهایت سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

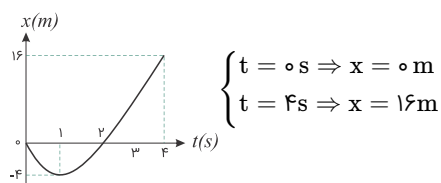


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به نمودار مکان- زمان، مکان متحرک در لحظه‌های ۰ و ۴s برابر است با:



حال مقادیر به‌دست‌آمده را در معادلهٔ سرعت متوسط جایگذاری می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{16 - 0}{4 - 0} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

گام اول

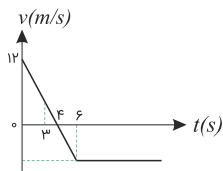
بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی ۳ تا ۶ ثانیه؟ ← $a_{av}(t_3-t_6) = ?$

گام دوم

چون در بازه زمانی ۰ تا ۶ ثانیه شتاب (شیب) ثابت است، پس شتاب متوسط در تمامی بازه‌های زمانی بین زمان‌های ۰ تا ۶ ثانیه باهم برابر است یعنی:

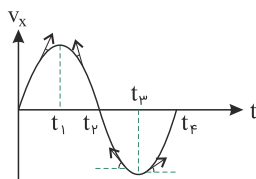
$$a_{av}(0-6s) = a_{av}(3-6s) = a_{av}(t_3-t_6)$$

$$|a_{av}(t_3-t_6)| = |a_{av}(0-6s)| = \frac{|\Delta v|}{|\Delta t|} = \frac{|0 - 12|}{|6 - 0|} = 2 \text{ m/s}^2$$

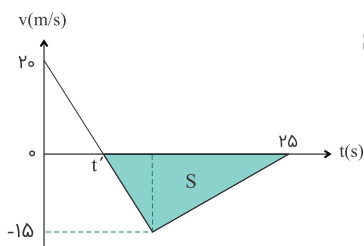


بازه‌های زمانی که شیب‌شان مثبت باشد (مطابق نمودار) ۰ تا t_1 و t_3 تا t_6 است. پس با توجه به اینکه شیب در نمودار سرعت - زمان، همان شتاب است، درمی‌یابیم که شتاب در این بازه‌ها مثبت است.

از طرفی چون شتاب مثبت است، بردار شتاب متحرک در جهت مثبت محور x است.



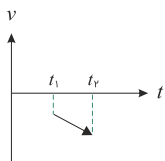
مساحت زیر نمودار $v - t$ ، برابر است با مقدار جابه‌جایی متحرک. از طرفی باتوجه‌به اینکه بازه‌ای را می‌خواهیم که متحرک خلاف جهت محور x حرکت کرده، داریم: (بازه t' تا t_5)



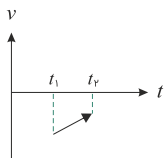
$$S = |\Delta x| = \frac{(20 - t')}{2} \times 15$$

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{(20 - t')}{2} \times 15 \times \frac{1}{(20 - t')} = 7.5 \text{ m/s}$$

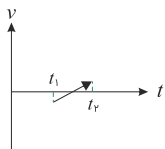
با توجه به پیوسته تندشونده بودن حرکت، اندازه سرعت باید در حال افزایش باشد و $av > 0$ باشد (شیب در نمودار سرعت- زمان، شتاب است).
گزینه ها را بررسی می کنیم:



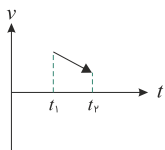
گزینه ۱: اندازه سرعت در حال افزایش است پس حرکت تندشونده است (از طرفی $av > 0$ است).



گزینه ۲: اندازه سرعت در حال کاهش است پس حرکت کندشونده است ($av < 0$).
گزینه ۳: ابتدا اندازه سرعت در حال کاهش و سپس افزایش است، پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است (ابتدا $av < 0$ و سپس $av > 0$).



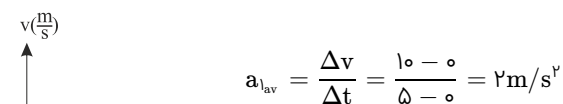
گزینه ۴: اندازه سرعت در حال کاهش است، پس حرکت کندشونده است ($av < 0$).



گزینه ۱ درست است.

شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید، پس برای اینکه شتاب متوسط در بازه زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۱۲s$ را به دست بیاوریم، باید سرعت در این لحظه‌ها را محاسبه کنیم.

شیب (شتاب) نمودار در بازه $۵ - ۰$ ثانیه برابر است با:



$$a_{1av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

باتوجه به آنکه شیب (شتاب) ثابت است می‌توانیم سرعت را در لحظه $t = ۲s$ به دست آوریم.

$$v_1 = a_{1av} t_1 + v_{01} \Rightarrow v_1 = 2 \times 2 + 0 = 4 \text{ m/s}$$

در بازه زمانی $۱۴ - ۱۰$ ثانیه هم به همین صورت داریم:

$$a_{2av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{14 - 10} = \frac{-10}{4} = -2.5$$

سرعت در لحظه $t = ۱۲s$ هم به دست می‌آید.

$$v_2 = a_{2av} t_2 + (v_0)_2 \Rightarrow v_2 = -2.5 \times 2 + 10 = 5 \text{ m/s}$$

دقت شود که معادله این خط را از $t = ۱۰s$ ، یعنی دو ثانیه پس از لحظه $t = ۱۲s$ ، نوشتیم.

حال کافی است مقادیر سرعت در لحظات $t = ۱۲$ و $t = ۲$ را در رابطه شتاب متوسط جایگذاری کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{12} - v_2}{\Delta t} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = 0.1 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) نمودار مکان- زمان به صورت سهمی $\leftarrow$ شتاب ثابت

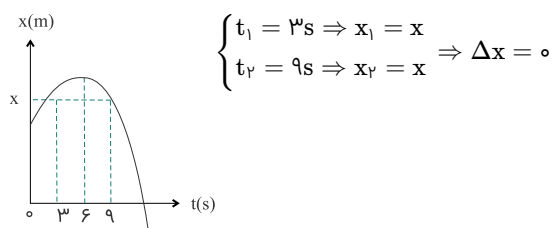
ب) مسافت طی‌شده در بازه $t = ۳s$ تا $t = ۹s$ برابر ۱۲ متر $\leftarrow d = ۱۲m$, $\Delta t = ۹ - ۳ = ۶s$

ج) جابه‌جایی متحرک چند متر است؟ $\leftarrow \Delta x = ?$

گام دوم

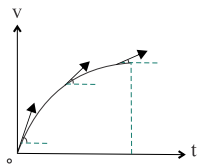
باتوجه به نمودار مکان- زمان، متحرک در لحظه $t = ۶s$ (لحظه‌ای که سرعت صفر شده) تغییر جهت می‌دهد. پس لزوماً مقدار مسافت طی‌شده برابر جابه‌جایی نیست.

ازطرفی $t = ۶s$ ، وسط بازه ۳ تا ۹ ثانیه می‌باشد؛ پس مکان لحظه $t_1 = ۳s$ با مکان لحظه $t_2 = ۹s$ برابر است، بنابراین:



$$\begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow x_1 = x \\ t_2 = 9s \Rightarrow x_2 = x \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 0$$

سرعت در حال افزایش است پس حرکت تند شونده است. از طرفی شیب در نمودار سرعت - زمان، همان شتاب است؛ و چون شیب نمودار در هر نقطه متفاوت بوده پس شتاب متغیر است. در نتیجه حرکت تند شونده و با شتاب متغیر است.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

مساحت زیر نمودار سرعت-زمان، برابر است با مقدار جابه‌جایی. پس کافی است مطابق شکل زیر مساحت قسمت هاشورخورده را محاسبه کنیم. برای این منظور معادله سرعت-زمان را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ v_0 = 12 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v = -t + 12$$

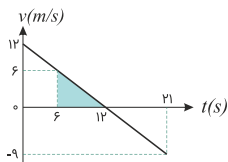
$$a = \frac{(-9) - (+12)}{21 - 0} = -1 \text{ m/s}^2 \quad \text{شیب خط}$$

سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 6 \text{ s}$ و $t = 12 \text{ s}$ برابر است با:

$$\begin{cases} t_1 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_1 = -6 + 12 = 6 \text{ m/s} \\ t_2 = 12 \text{ s} \Rightarrow v_2 = -12 + 12 = 0 \text{ m/s} \end{cases}$$

نمودار به صورت زیر است. پس مقدار جابه‌جایی را می‌توانیم بیایم.

$$\begin{cases} S = \frac{(12 - 6) \times 6}{2} = 18 \\ \Delta x = S \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 18 \text{ m}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده؟ $\leftarrow \Delta t = ?$, $v < 0$

گام دوم

مطابق نمودار، مدت‌زمانی که در جهت مخالف حرکت کرده، یعنی علامت سرعتش منفی بوده است، از $t = 14$ تا $t = 14$ ثانیه است. بنابراین t را باید بیایم: با توجه به نقاط داده‌شده، از لحظه $t = 2 \text{ s}$ تا $t = 14 \text{ s}$ معادله سرعت (معادله خط) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - 4}{14 - 2} = -1 \text{ m/s}^2 \\ t_1 = 2 \text{ s} : v_1 = 4 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{معادله خط : } y - y_0 = m(x - x_0) \\ \text{معادله سرعت : } v - v_1 = a(t - t_1) \end{cases} \Rightarrow v = -1(t - 2) + 4 \Rightarrow v = -t + 6$$

برای محاسبه t ، مطابق نمودار، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = -t + 6 \Rightarrow 0 = -t + 6 \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

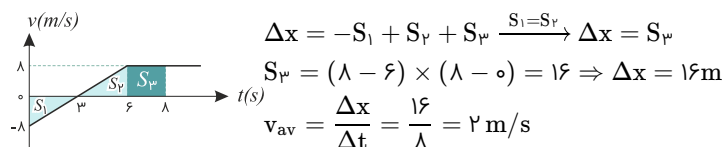
پس مدت‌زمانی که متحرک در جهت مخالف محور x بوده از $t = 6 \text{ s}$ تا $t = 14 \text{ s}$ است یعنی: $14 - 6 = 8 \text{ s}$

گام اول

سرعت متوسط جسم در ۸ ثانیه نشان داده شده ؟ $\leftarrow v_{av} = ?$, $\Delta t = 8s$

گام دوم

برای محاسبه سرعت از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. از آنجایی که مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، برابر مقدار جابه‌جایی است و باتوجه به اینکه S_1 و S_2 قرینه همدیگرند، مقدار جابه‌جایی را به دست آورده و در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم:



گام اول

الف) متحرک با سرعت متوسط $6/4 m/s \leftarrow v_{av} = 6/4 m/s$

ب) سرعت اولیه چند متر بر ثانیه ؟ $\leftarrow v_o = ?$

گام دوم

ابتدا جابجایی را با استفاده از معادله مکان و سرعت متوسط به دست می‌آوریم و بعد به کمک تغییرات سرعت، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:
جابجایی در بازه زمانی ۰ تا ۲s:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_o t_1 \\ a_1 = 2 m/s^2 \\ t_1 = 2s \end{cases} \Rightarrow \Delta x_1 = 4 + 2v_o$$

جابجایی در بازه زمانی ۲s تا ۵s:

$$\begin{cases} \Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_1 t_2 \\ a_2 = -2 m/s^2 \\ t_2 = 3s \end{cases} \Rightarrow \Delta x_2 = -9 + 3v_1$$

بنابراین جابجایی کل برابر است با:

$$\Delta x_T = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 4 + 2v_o - 9 + 3v_1 = 3v_1 + 2v_o - 5 \quad (I)$$

از طرفی $v_{av} = 6/4 m/s$ است، بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_T}{\Delta t_T} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{\Delta x_T}{5} \Rightarrow \Delta x_T = 3m \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} 3 = 3v_1 + 2v_o - 5 \Rightarrow 3v_1 + 2v_o = 8$$

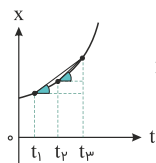
باتوجه به اینکه مساحت زیر نمودار $a - t$ ، برابر با Δv است، داریم:

$$\begin{cases} \Delta v = 8 \\ 8 = 2 \times 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \Delta v = 4 \Rightarrow v_1 - v_o = 4$$

درنهایت با حل دستگاه زیر، سرعت اولیه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} v_1 - v_o = 4 \\ 3v_1 + 2v_o = 8 \end{cases} \Rightarrow 3(4 + v_o) + 2v_o = 8 \Rightarrow v_o = -4 m/s$$

با وصل کردن دونقطه در نمودار مکان - زمان و محاسبه شیب، سرعت متوسط در آن بازه زمانی به دست می‌آید. پس نقاط ۱ و ۲ و ۳ را به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شیب‌های به‌دست‌آمده در بازه‌های زمانی مختلف، می‌فهمیم که در بازه زمانی t_2 تا t_3 ، شیب بیشتر است؛ پس سرعت متوسط بیشتری هم دارد.



$$m_{23} > m_{13} > m_{12} \rightarrow v_{23} > v_{13} > v_{12}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

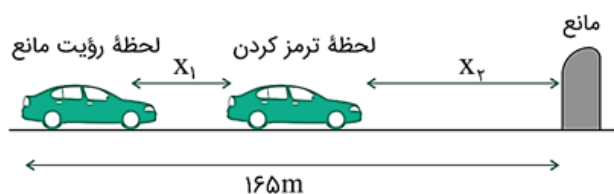
الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت 108 km/h در حال حرکت است. $\leftarrow v_0 = 108 \text{ km/h} = \frac{108}{3.6} = 30 \text{ m/s}$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصله $165 \text{ m} \leftarrow$ فاصله اتومبیل از مانع در لحظه دیدن آن

ج) با شتاب ثابت 3 m/s^2 ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد $\leftarrow a = -3 \text{ m/s}^2$

گام دوم

باتوجه به شکل زیر و معادله سرعت- زمان خواهیم داشت:



$$x_2 = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(30)^2}{-2 \times 3} = 150 \text{ m}$$

$$x_1 = 165 - x_2 = 165 - 150 = 15 \text{ m}$$

$$v = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$v = at_2 + v_0 \Rightarrow 0 = -3 \times t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10 \text{ s}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

گام اول

الف) متحرکی با سرعت اولیه $v_0 = 4 \text{ m/s} \leftarrow +4 \text{ m/s}$

ب) با شتاب $a = 2 \text{ m/s}^2 \leftarrow 2 \text{ m/s}^2$

ج) در یک مسیر مستقیم 12 m جابه‌جا می‌شود $\Delta x = 12 \text{ m} \leftarrow$

د) سرعت متوسط متحرک در این جابه‌جایی چقدر است؟ $v_{av} = ? \leftarrow$

گام دوم

اگر سرعت ابتدا و انتهای بازه زمانی را داشته باشیم، در صورتی که شتاب حرکت ثابت باشد، سرعت متوسط از رابطه $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ به دست می‌آید. سرعت اولیه را داریم

پس کافی است سرعت نهایی را به دست آوریم:

با توجه به رابطه مستقل از زمان داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - (4)^2 = 2 \times 2 \times 12 \Rightarrow v^2 = 64 \Rightarrow v = \pm 8 \text{ m/s}$$

از آنجایی که v_0 مثبت و a هم مثبت و ثابت است، هیچ وقت سرعت منفی نخواهد شد.

بنابراین سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6 \text{ m/s}$$

گام اول

الف) اتومبیل با سرعت ۲۰m/s در حرکت است $\leftarrow v_A = ۲۰\text{m/s}$

ب) ۳۶ متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $۲\text{m/s}^2 \leftarrow x_B = +۳۶$ ، $a_B = ۲\text{m/s}^2$

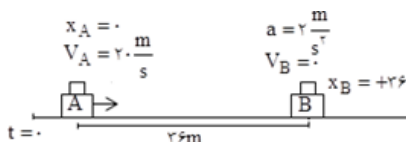
پ) از حال سکون و در همان جهت به راه می افتد $\leftarrow (v_0)_B = 0$ ، $v_B > 0$

ج) اتومبیل ها دو بار از هم سبقت می گیرند $\leftarrow x_A = x_B$

د) فاصله زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟ $\Delta t = ?$

گام دوم

مکان شروع به حرکت اتومبیل A که عقب تر از اتومبیل B است را مبدأ مکان در نظر می گیریم سپس با نوشتن معادله حرکت برای هر دو اتومبیل و مساوی قرار دادن دو معادله باهم می توانیم زمان های سبقت را به دست آوریم:



ابتدا معادله حرکت (با سرعت ثابت) اتومبیل A را می نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_A + (x_0)_A \\ (x_0)_A = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = ۲۰t$$

حالا معادله حرکت (با شتاب ثابت) اتومبیل B را می نویسیم:

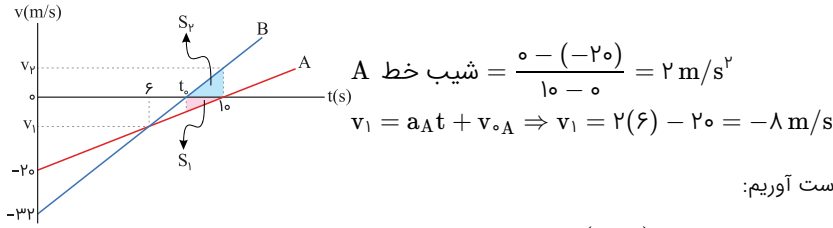
$$\begin{cases} x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + (v_0)_B t + (x_0)_B \\ (x_0)_B = +۳۶\text{m} \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \times ۲ \times t^2 + 0 + ۳۶ = t^2 + ۳۶$$

با مساوی قرار دادن دو معادله حرکت اتومبیل های A و B، زمان های سبقت دو اتومبیل از یکدیگر را به دست می آوریم.

$$x_B = x_A \Rightarrow ۲۰t = t^2 + ۳۶ \Rightarrow t^2 - ۲۰t + ۳۶ = 0 \Rightarrow (t - ۲)(t - ۱۸) = 0 \Rightarrow t_1 = ۲, t_2 = ۱۸$$

پس اختلاف زمانی دو سبقت برابر $۱۶\text{s} = ۱۸ - ۲ = \Delta t = t_2 - t_1$ است.

از لحظه t_0 تا ۱۰ ثانیه سرعت متحرک B مثبت و سرعت متحرک A منفی است، یعنی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. شیب خط A را می‌نویسیم:



حال برای پیدا کردن v_2 ابتدا شیب خط B را نوشته تا شتاب B را به دست آوریم:

$$\text{شیب خط B} = \frac{-8 - (-32)}{6 - 0} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$v_2 = a_B t + v_{0B} \Rightarrow v_2 = 4 \times 10 - 32 = 8 \text{ m/s}$$

برای پیدا کردن t_0 کافی است v_B را برابر صفر قرار دهیم:

$$v_B = a_B t + v_0 \Rightarrow 0 = 4 \times t_0 - 32 \Rightarrow t_0 = 8 \text{ s}$$

سرعت A در t_0 را محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = 2 \times 8 - 20 = -8 \text{ m/s}$$

حال اگر مساحت‌های S_1 و S_2 را محاسبه کنیم. برابر فاصله دو متحرک در بازه زمانی است که خلاف جهت هم حرکت می‌کنند:

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \left(\frac{(10 - 8) \times (4)}{2} \right) + \left(\frac{8 \times (10 - 8)}{2} \right) = 4 + 8 = 12 \text{ m}$$

برای تعیین تغییر فاصله، علاوه بر جهت حرکت، باید به موقعیت نسبی دو متحرک نیز توجه کرد. در لحظه $t = 8 \text{ s}$ ، متحرک B عقب‌تر از متحرک A قرار دارد. در بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه، هر دو متحرک در این بازه به سمت هم حرکت می‌کنند. بنابراین، فاصله بین آن‌ها به اندازه جابجایی نسبی‌شان یعنی ۱۲ متر کاهش می‌یابد.

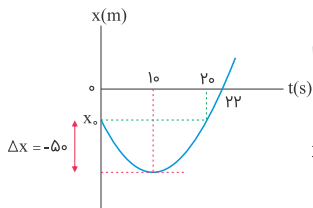
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

در لحظه $t = 10 \text{ s}$ (رأس سهمی) سرعت صفر است. داریم:

$$t_{\text{راس}} = \frac{-v_0}{a} \Rightarrow \frac{-v_0}{a} = 10 \Rightarrow v_0 = -10a$$

جابجایی از لحظه صفر تا $t = 10 \text{ s}$ برابر است با مسافت طی شده در این بازه زمانی، پس:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow -50 = \frac{1}{2} a (100) + (-10a) \times 10 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2, v_0 = -10 \text{ m/s}$$

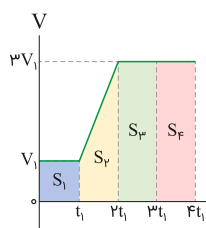


مکان متحرک در لحظه $t = 20 \text{ s}$ به دلیل تقارن در سهمی، همان مکان اولیه است. پس به کمک معادله مکان-زمان در $t = 22 \text{ s}$ داریم:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 - 10t + x_0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} (1) (484) - 10(22) + x_0 \Rightarrow x_0 = -22 \text{ m}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۴

در نمودار سرعت- زمان، مساحت زیر نمودار بیانگر جابه‌جایی است.



$$S_1 = v_1 t_1$$

$$S_2 = \frac{(v_1 + 3v_1)t_1}{2} = 2v_1 t_1$$

$$S_3 = 3v_1 t_1$$

$$S_4 = 3v_1 t_1$$

$$\text{گزینه ۱: } v_{av} = \frac{v_1 t_1}{t_1} = v_1$$

$$\text{گزینه ۲: } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1}{2t_1} = \frac{3}{2}v_1$$

$$\text{گزینه ۳: } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1 + 3v_1 t_1}{3t_1} = 2v_1$$

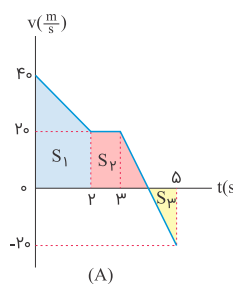
$$\text{گزینه ۴: } v_{av} = \frac{v_1 t_1 + 2v_1 t_1 + 3v_1 t_1 + 3v_1 t_1}{4t_1} = \frac{9}{4}v_1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در واقع در هر بازه زمانی که مقدار سرعت در آن بیشتر باشد، سرعت متوسط بیشتری هم دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۴

قدر مطلق مساحت زیر نمودار سرعت - زمان بیانگر مسافت طی شده است.

مسافت طی شده A:



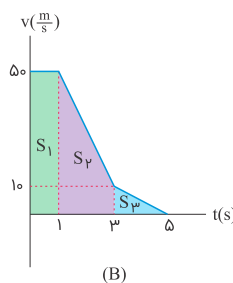
$$S_1 = \frac{1}{2}(40 + 20)(2) = 60\text{m}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(1 + 2)(20) = 30\text{m}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(1)(20) = 10\text{m}$$

$$L_A = S_1 + S_2 + S_3 = 60 + 30 + 10 = 100\text{m}$$

مسافت طی شده B:



$$S_1 = 50\text{m}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(10 + 50)(2) = 60\text{m}$$

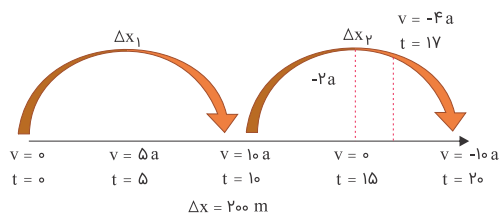
$$S_3 = \frac{1}{2}(2)(10) = 10\text{m}$$

$$L_B = S_1 + S_2 + S_3 = 50 + 60 + 10 = 120\text{m}$$

$$\frac{L_B}{L_A} = 1/2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۴

مطابق شکل سرعت‌ها را در زمان‌های کلیدی از رابطه $v = at + v_0$ به دست می‌آوریم.



الکون مسافت‌های طی شده در بازه‌های زمانی صفر تا $t = 10 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ تا $t = 20 \text{ s}$ را محاسبه می‌کنیم:

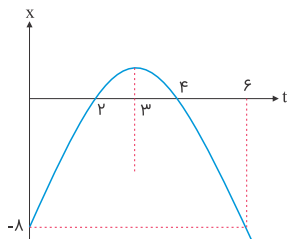
$$\Delta x = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = \left(\frac{0 + 10a}{2} \right) 10 = 50a \\ \Delta x_2 = \left(\frac{10a + 0}{2} \right) 10 + \left(\frac{0 + 10a}{2} \right) 10 = 100a \end{cases}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 100a = 200 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2a - 0a}{20 - 0} = \frac{-4a}{20} = -1/5 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۴

۳ ثانیه دوم یعنی از $t=3 \text{ s}$ تا $t=6 \text{ s}$. با توجه به اطلاعات داده شده، نمودار مکان- زمان مطابق زیر است:



همچنین در راس سهمی داریم:

$$t_{\text{راس}} = \frac{-v_0}{a} \Rightarrow \frac{-v_0}{a} = 3 \Rightarrow v_0 = -3a$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 - 3at \xrightarrow{t=6} 1 = \frac{1}{2} a(6)^2 - 3a(6)$$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2, v_0 = 6 \text{ m/s}$$

سرعت در لحظه $t=3 \text{ s}$ صفر و همچنین به دلیل تقارن در سهمی، تندی در لحظه $t=6 \text{ s}$ برابر تندی اولیه است.

$$s_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۴

برای حل این مسئله، ابتدا باید معادلات مکان زمان هر دو متحرک را در بازه‌های مختلف حرکتشان به دست آوریم. سپس، اختلاف مکان آن‌ها را محاسبه کرده و بازه‌های زمانی که این اختلاف کمتر یا مساوی ۱۲ متر است را پیدا کنیم.

$$0 - 6s : \begin{cases} x_A = 2t^2 \\ x_B = t^2 + 6\lambda \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 6\lambda \leq 12 \Rightarrow t \leq 4\sqrt{5} \times \\ t^2 - 6\lambda \geq -12 \Rightarrow t \geq 2\sqrt{4} \times \end{cases}$$

$$6s - 10s : \begin{cases} x_A = 24t'^2 + 72 \\ x_B = t'^2 + 12t + 104 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} -t'^2 + 12t - 32 \leq 12 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ -t'^2 + 12t - 32 \geq -12 \Rightarrow t' = 2s \Rightarrow t = 8s \end{cases}$$

پس از بازه ۸ تا ۱۰ ثانیه (به مدت ۲ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

$$10s - \infty : \begin{cases} x_A = 24t'' + 168 \\ x_B = 20t'' + 168 \end{cases}$$

$$-12 \leq x_A - x_B \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} 4t'' \leq 12 \Rightarrow t'' = 3s \\ 4t'' \geq -12 \Rightarrow t'' = -3s \times \Rightarrow t = 10s \end{cases}$$

پس از بازه ۱۰ تا ۱۳ ثانیه (به مدت ۳ ثانیه) فاصله این دو متحرک کمتر یا مساوی ۱۲ است.

در نتیجه در مجموع ۵ ثانیه (از ۸ ثانیه تا ۱۳ ثانیه) فاصله دو متحرک کمتر از ۱۲ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۴

ابتدا باید معادله سرعت متحرک را به دست آوریم و سپس زمانی را که سرعت صفر می‌شود، پیدا کنیم. در نهایت، با جایگذاری این زمان در معادله مکان- زمان، مکان متحرک را در آن لحظه محاسبه می‌کنیم.

از مقایسه معادله مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله صورت سوال داریم:

$$\left. \begin{aligned} x &= -4t^2 + 24t - 30 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -8 \text{ m/s}^2, v_0 = 24 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -8t + 24 \xrightarrow{v=0} t = 3s$$

$$\xrightarrow{t=3s} x = -4 \times 9 + 24 \times 3 - 30 = 6 \text{ m}$$

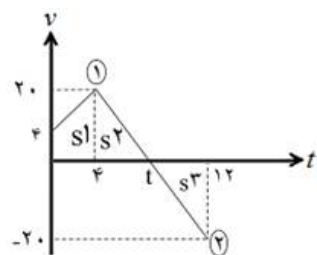
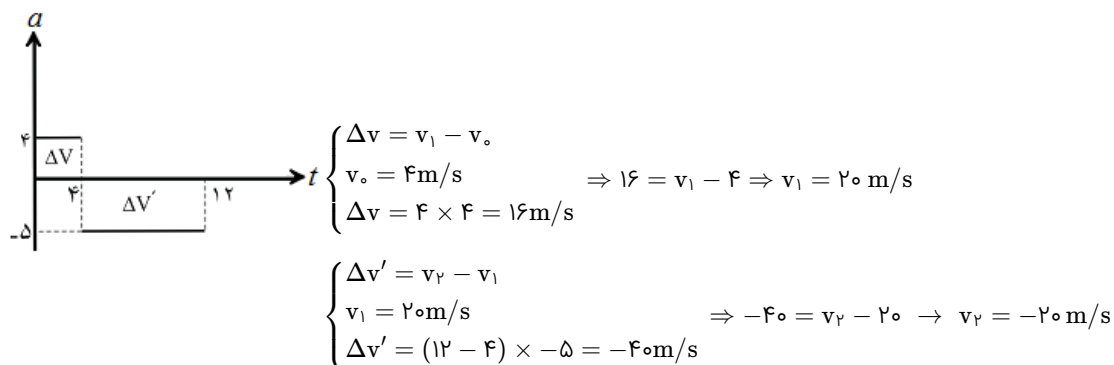
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۴

گام اول

الف) در مبدأ زمان با سرعت 4 m/s از مبدأ مکان می‌گذرد $\leftarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$, $x_0 = 0$
 ب) مسافت طی‌شده در بازه 0 تا 12 ثانیه $\leftarrow$ ؟ = مسافت طی‌شده : $\Delta t = 12 \text{ s}$

گام دوم

باید نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم تا با استفاده از این نکته که مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مقدار جابجایی است، مسافت را در بازه مشخص به دست آوریم.
 برای رسم نمودار $v - t$ سرعت در لحظات $t = 4 \text{ s}$, $t = 12 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم.



حالا مطابق نمودار $v - t$ لحظه t را حساب می‌کنیم (t بین 4 s و 12 s است پس شتاب -5 m/s^2 است).

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - 20}{t - 4} \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

در نهایت باتوجه به اینکه قدر مطلق جابجایی در بازه‌های مختلف برابر مسافت طی‌شده است، مسافت طی‌شده در 12 ثانیه را به دست می‌آوریم:

$$\text{مسافت طی‌شده} = \frac{4 + 20}{2} \times 4 + \frac{20 \times 4}{2} + \frac{20 \times 4}{2} = 128 \text{ m}$$

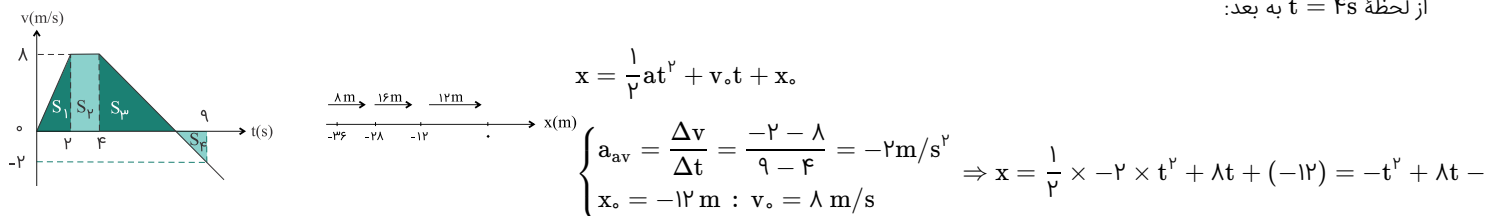
گام اول

پس از چند ثانیه برای اولین بار از مبدأ می‌گذرد $\leftarrow x = 0 : t = ?$

گام دوم

به ترتیب برای بازه‌های زمانی مختلف (مطابق نمودار) جابجایی را به دست می‌آوریم. (جابجایی برای زمان‌هایی که نمودار زیر محور t است، منفی است.) تا لحظه $t = 4$ s مقدار جابجایی ۲۴ متر بوده است. در لحظه ۴ ثانیه به بعد به کمک معادله مکان، زمانی که متحرک به مبدأ می‌رسد را حساب می‌کنیم:

از لحظه $t = 4$ s به بعد:



درنهایت زمان کل برابر است با:

$$x = -t^2 + 8t - 12 \xrightarrow{x=0} t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ s} \\ t = 6 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow t_T = \begin{cases} 4 + 2 = 6 \text{ s} \\ 4 + 6 = 10 \text{ s} \end{cases}$$

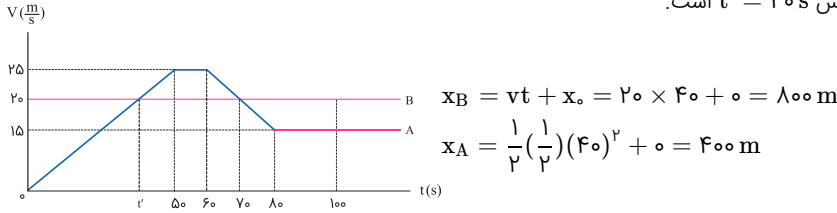
درنتیجه پس از ۶ ثانیه برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

باید نشان دهیم مکان هر متحرک در هر لحظه چگونه تغییر می‌کند تا با کمک مکان‌های آن‌ها دور یا نزدیک شدن دو متحرک را تشخیص دهیم:

هر دو متحرک در $t = 0$ در $x = 0$ قرار دارند.

با توجه به اینکه شتاب متحرک A در بازه زمانی $(0, 50)$ ثابت است، پس $t' = 50$ s است.

در $t' = 50$ s مکان دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:



$$x_B = vt + x_0 = 20 \times 50 + 0 = 1000 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (50)^2 + 0 = 625 \text{ m}$$

در $t = 50$ s داریم:

$$x_B = 20 \times 50 = 1000 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) (50)^2 = 625 \text{ m}$$

در $t = 60$ s:

$$x_B = 20 \times 60 = 1200 \text{ m}$$

$$x_A = v_A t + x'_0 = 20 \times 10 + 625 = 825 \text{ m}$$

در $t = 70$ s:

$$x_B = 20 \times 70 = 1400 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) (10)^2 + 20 \times 50 + 825 = 1100 \text{ m}$$

در $t = 80$ s:

$$x_B = 20 \times 80 = 1600 \text{ m}$$

$$x_A = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) (10)^2 + 20 \times 50 + 1100 = 1275 \text{ m}$$

و در آخر در $t = 90$ s:

$$x_B = 20 \times 90 = 1800 \text{ m}$$

$$x_A = v_A t + x''_0 = 15 \times 10 + 1275 = 1425 \text{ m}$$

مشخص است در هر بازه زمانی ۱۰ ثانیه‌ای متحرک B، ۲۰۰ متر جابه‌جا می‌شود ولی متحرک A بیشتر از ۲۰۰ متر جابه‌جا می‌شود پس این دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

تندی در لحظه $t = 12$ s برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان است. پس:

$$v_{t=12s} = \frac{240}{12-4} = \frac{240}{8} = 30 \text{ m/s}$$

اگر مکان متحرک در $t = 14$ (s) را x_{14s} در نظر بگیریم، تندی متوسط متحرک در بازه $(2s, 14s)$ برابر است با:

$$S_{av(2s, 14s)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{x_{14s} - 60}{14 - 2}$$

باتوجه به صورت تست، $S_{av(2s, 14s)} = v_{t=12s}$ است، پس:

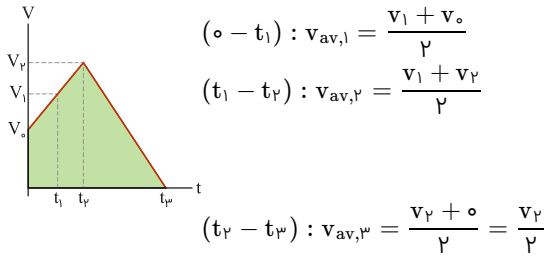
$$\frac{x_{14s} - 60}{14 - 2} = 30 \Rightarrow x_{14s} = 420 \text{ m}$$

حالا نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم. دو ثانیه اول یعنی $(0, 2s)$ و دو ثانیه هفتم یعنی $(12s, 14s)$ ، پس:

$$\frac{v_{av(0, 2s)}}{v_{av(12s, 14s)}} = \frac{\frac{x_{2s} - x_0}{2 - 0}}{\frac{x_{14s} - x_{12s}}{14 - 12}} = \frac{x_{2s} - x_0}{x_{14s} - x_{12s}} = \frac{60 - 0}{420 - 240} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

باتوجه به نمودار مشخص است که جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند. در این صورت تندی متوسط و سرعت متوسط در تمامی بازه‌ها باهم برابر است. در بازه زمانی ۰ تا t_2 شتاب حرکت ثابت است. پس می‌توان نوشت:



در بازه زمانی t_2 تا t_3 نیز شتاب حرکت ثابت است. پس می‌توان نوشت:

براساس معادلات تا اینجا مشخص است که:

$$v_{av,2} > v_{av,1}, v_{av,3}$$

تندی متوسط در کل حرکت مقداری بین تندی متوسط در بازه زمانی $(0 - t_1)$ و $(t_2 - t_3)$ دارد یعنی:

$$v_{av,3} < v_{av, \text{کل}} < v_{av}$$

پس تندی متوسط در بازه زمانی $(t_1 - t_2)$ از تندی متوسط کل بزرگتر است:

$$v_{av,2} > v_{av, \text{کل}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

$$v_2^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - v_0^2 = 2(-2)4 \Rightarrow v_0 = 4 \frac{m}{s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = -t^2 + 4t - 3$$

$$\Rightarrow x = -(t^2 - 4t + 3)$$

$$\Rightarrow x = -(t - 1)(t - 3) \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{اگر } t = 4 \Rightarrow x = -3$$

$$S = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1 + 1 + 3}{3} = \frac{5}{3} \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

شتاب در بازه‌ای که شیب نمودار سرعت - زمان منفی است در خلاف جهت محور x است غیر از گزینه "۲" در سایر گزینه‌ها سرعت ثانویه بیشتر از سرعت اولیه است. $\Delta v > 0$.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

$$18 \frac{km}{h} = 5 \frac{m}{s}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 25 - 16 = 2a(19 - 10)$$

$$\Rightarrow 9 = 18a \Rightarrow a = \frac{1}{2} m/s^2$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x' \Rightarrow 16 - v_0^2 = 2 \times \frac{1}{2} \times (10 - (-6))$$

$$\Rightarrow 16 - 16 = v_0^2 \Rightarrow v_0 = \text{صفر}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

از آنجایی که از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند آن متحرکی که شتاب بیشتری دارد زودتر می‌رسد.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} a_1 t^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{16}{\gamma \omega} \right) a_1 (t + \omega)^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{4}{\omega} (t + \omega) \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

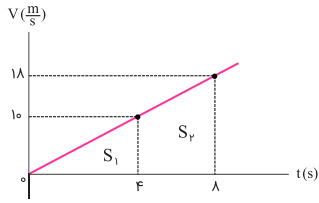
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

برای محاسبه سرعت متوسط دو متحرک ابتدا نمودار سرعت - زمان را رسم کرده سپس نسبت جابه‌جایی آن‌ها در ۸s اول حرکت را مقایسه می‌کنیم:
متحرک A:

$$v = at + v_0$$

$$v_{Fs} = 2/5 \times 5 + 0 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{As} = 2 \times 5 + 10 = 18 \text{ m/s}$$



$$\Delta x_A = S_1 + S_2 = \left(\frac{5 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 + 18}{2} \times 5 \right)$$

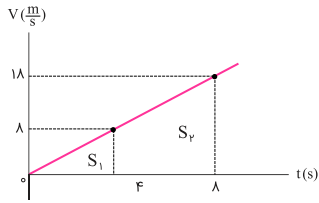
$$\Delta x_A = 20 + 56 = 76 \text{ m}$$

متحرک B:

$$v = at + v_0$$

$$v_{Fs} = 2 \times 5 + 0 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{Bs} = 2/5 \times 5 + 10 = 18 \text{ m/s}$$

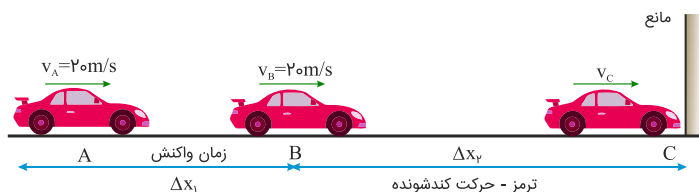


$$\Delta x_B = S_1 + S_2 = \left(\frac{5 \times 10}{2} \right) + \left(\frac{10 + 18}{2} \times 5 \right)$$

$$\Delta x_B = 16 + 52 = 68 \text{ m}$$

حال خواسته سوال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\bar{v}_B}{\bar{v}_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \frac{68}{76} = \frac{17}{19}$$



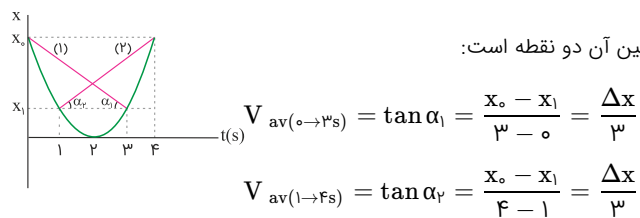
$$\Delta x_1 = vt_1 = 20 \times 0.5 = 10 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = 52 - 10 = 42 \text{ m}$$

$$v_C^2 - v_B^2 = -2a(\Delta x_2) \rightarrow v_C^2 - 20^2 = -2 \times 4 \times 42$$

$$v_C^2 = -336 + 400 = 64 \Rightarrow v_C = 8 \text{ m/s}$$

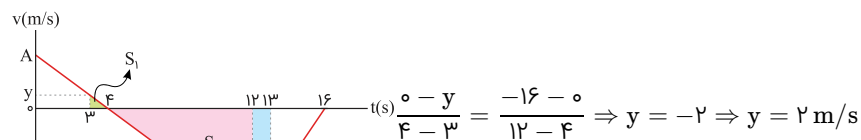
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹



$$|V_{av(0 \rightarrow 3s)}| = |V_{av(1 \rightarrow 4s)}|$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

شیب خط AB ثابت است:



مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{(12 - 4) \times 16}{2} = 64 \text{ m}$$

پس متحرک در بازه زمانی (۱۲ s , ۳ s)، ۶۵ متر طی کرده است.

شیب CB ثابت است:

$$\frac{16 - |y'|}{13 - 12} = \frac{0 - (-16)}{16 - 12} \Rightarrow 16 - |y'| = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow |y'| = 12 \text{ m/s} \Rightarrow y' = -12 \text{ m/s}$$

حال برای محاسبه مسافت طی شده در بازه زمانی (۱۲ s , ۱۳ s) مسافت ذوزنقه (S۳) را حساب می‌کنیم:

$$S_3 = \frac{y' + 16}{2} \times (13 - 12) = \frac{12 + 16}{2} \times 1 = 14 \text{ m}$$

برای محاسبه تندی:

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{64 + 14}{13 - 3} = \frac{78}{10} = 7.8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

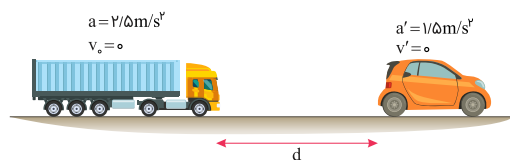
طبق صورت سوال، فاصله دو متحرک از هم ۵ m است و متحرک دوم ۷ m از متحرک اول جلوتر است، با در نظر گرفتن مکان متحرک اول به عنوان مبدأ مکانی داریم:



$$\left| \underbrace{\Delta x_1}_{\text{حرکت یکنواخت}} - \underbrace{\Delta x_2}_{\text{حرکت شتابدار}} \right| \Rightarrow |vt - (\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0)| = 5$$

$$\Rightarrow |8t - (\frac{1}{2} \times 2 \times t^2 - 7)| = 5 \Rightarrow |8t - t^2 - 7| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 8t - t^2 - 7 = 5 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = 6s \end{cases} \\ 8t - t^2 - 7 = -5 \Rightarrow t^2 - 8t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 + \sqrt{14} \\ t = 4 - \sqrt{14} \end{cases} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲



مبدأ مختصات را محل کامیون در نظر می‌گیریم:

$$x_o = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o \Rightarrow x_o = \frac{1}{2} a' t^2 + d = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} t^2 + d = \frac{3}{4} t^2 + d$$

$$x_k = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o \Rightarrow x_k = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} t^2 = \frac{5}{4} t^2$$

لحظه به هم رسیدن اتومبیل و کامیون:

$$x_o = x_k \Rightarrow \frac{5}{4} t^2 = \frac{3}{4} t^2 + d \Rightarrow d = \frac{2}{4} t^2 \quad (1)$$

از طرفی وقتی اتومبیل ۷۵ متر را طی می‌کند، کامیون از آن سبقت می‌گیرد، پس:

$$\Delta x = \frac{3}{4} t^2 \Rightarrow 75 = \frac{3}{4} t^2 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = 10 \text{ s} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} d = \frac{2}{4} \times 100 = 50 \text{ m}$$

در لحظه $t = 15 \text{ s}$:

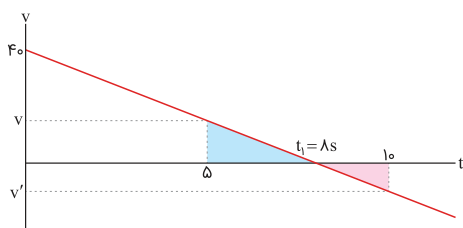
$$\left. \begin{aligned} x_o &= \frac{3}{4} \times (15)^2 + 50 = 218.75 \\ x_k &= \frac{5}{4} \times (15)^2 = 281.25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 281.25 - 218.75 = 62.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

در لحظه‌های t_o ، t_2 و t_3 چون خط مماس افقی است پس تندى صفر است. اما در لحظه t_1 شیب مثبت و تندى از لحظه‌های دیگر بیشتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و به کمک معادله شتاب t_1 و سرعت در لحظه‌های $t = 5\text{ s}$ و $t = 10\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - v_0}{t_1 - 0} \Rightarrow -5t_1 = -v_0 \Rightarrow t_1 = 10\text{ s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - v}{10 - 5} \Rightarrow v = 15\text{ m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{v' - 0}{10 - 10} \Rightarrow v' = -10\text{ m/s}$$

حال برای پیدا کردن تندی مساحت قسمت رنگی را به دست می‌آوریم:

$$L = \text{مساحت} : \frac{15 \times 5}{2} + \frac{5 \times 10}{2} = 32.5$$

$$S = \frac{L}{\Delta t} = \frac{32.5}{5} = 6.5\text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

گام اول: طبق صورت سوال:

$$\text{اگر خلاف جهت هم بروند} : v_2 + v_1 = 16\text{ m/s}$$

$$\text{اگر هم جهت حرکت کنند} : v_2 - v_1 = 240\text{ m/min} = 4\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_1 = 16 \\ v_2 - v_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} 2v_2 = 20 \Rightarrow v_2 = 10\text{ m/s}$$

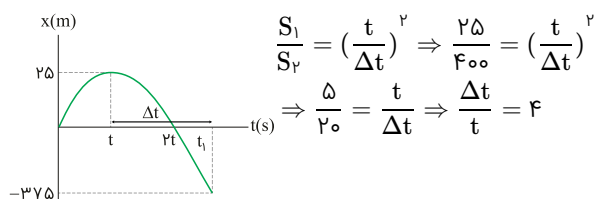
گام دوم: خواسته تست:

$$v_2 - v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 6\text{ m/s}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

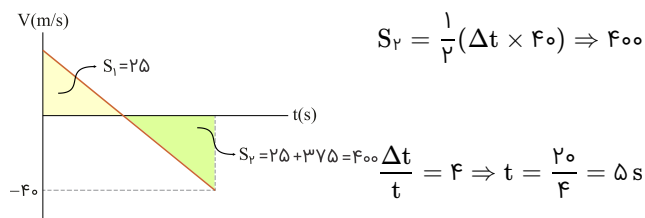
باتوجه به نمودار مکان- زمان داده شده، نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت را رسم می‌کنیم. مسافت پیموده‌شده توسط جسم در هر بازه مشخص شده است. پس می‌توان نوشت:



ازطرفی برای محاسبه مسافت پیموده شده در مدت زمان Δt داریم:

$$S_2 = \frac{1}{2}(\Delta t \times v_0) \Rightarrow 50 = 2 \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 25 \text{ s}$$

پس لحظه t برابر است با:

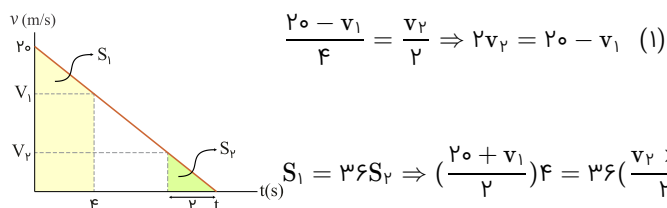


در مدت زمانی که جسم در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور است. در این صورت مدت زمان خواسته شده برابر است با:

$$2t = 2 \times 5 = 10 \text{ s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

شتاب حرکت که با شیب خط نمودار سرعت- زمان برابر است، ثابت است. پس می‌توان نوشت:



ازطرفی باتوجه به رابطه بین مسافت‌های داده شده می‌توان نوشت:

$$S_1 = 36S_2 \Rightarrow \left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right)t = 36\left(\frac{v_2 \times t}{2}\right) \Rightarrow 18v_2 = v_0 + v_1 \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

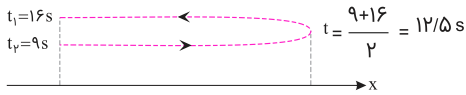
$$18v_2 = v_0 \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

در این صورت شتاب حرکت برابر است با:

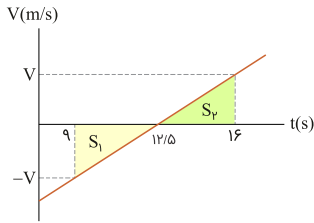
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_2}{t} \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

جابه‌جایی بین دو لحظه $t_1 = 9 \text{ s}$ و $t_2 = 16 \text{ s}$ برابر صفر است. در این صورت مکان اولیه و نهایی جسم بین این دو لحظه برابر است. پس می‌توان لحظه تغییر جهت حرکت جسم را مشخص کرد.



با رسم نمودار سرعت- زمان مربوط به حرکت جسم مشخص بودن شتاب، می‌توان تندی حرکت در لحظه‌های $t = 9 \text{ s}$ و $t = 16 \text{ s}$ را حساب کرد.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{16 - 12.5} \Rightarrow a = \frac{v}{3.5}$$

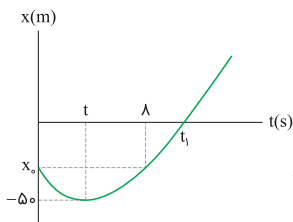
$$\Rightarrow v = 14 \text{ m/s}$$

اکنون برای محاسبه تندی متوسط داریم:

$$\left. \begin{aligned} s_{av} &= \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} \\ S_1 &= S_2 = \frac{14 \times 3.5}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_{av} = \frac{2 \left(\frac{14 \times 3.5}{2} \right)}{16 - 9} = v \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

در لحظه‌ای که متحرک به مکان $x = -50 \text{ m}$ می‌رسد، سرعت برابر صفر است.



$$v_{t_1}^2 - v_t^2 = 2a(x_{t_1} - x_t)$$

$$\Rightarrow (20)^2 - 0 = 2a(0 - (-50)) \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

با استفاده از معادله سرعت- جابه‌جایی داریم:

در ۸ ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط برابر صفر است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_\lambda}{2} = 0 \Rightarrow v_0 = -v_\lambda$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_\lambda = 4(\lambda) - v_\lambda \Rightarrow 2v_\lambda = 32 \Rightarrow v_\lambda = 16 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_0 = -16 \text{ m/s}$$

برای محاسبه سرعت متوسط در مدت‌زمان مشخص شده می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{v_{t_1} + v_0}{2} = \frac{20 + (-16)}{2} = 2 \text{ m/s}$$

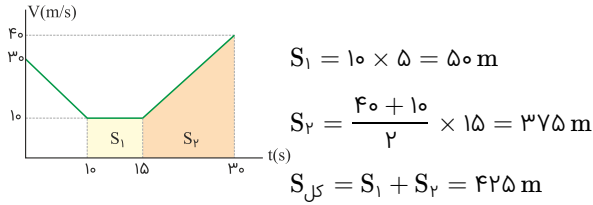
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

کافی است نمودار سرعت- زمان حرکت را رسم کنیم. سطح زیر نمودار ($v - t$) برابر با جابه‌جایی است که نسبت جابه‌جایی به زمان برابر با سرعت متوسط است.

$$t = 10 \text{ s} \text{ تا } t = 0 \text{ s} : v_1 = a_1 t + v_0 \xrightarrow{a_1 = -2 \text{ m/s}^2} v_1 = -2 \times 10 + 30 = 10 \text{ m/s}$$

$$t = 15 \text{ s} \text{ تا } t = 10 \text{ s} : v_2 = a_2 t + v_1 \xrightarrow{a_2 = 0} v_2 = v_1 = 10 \text{ m/s}$$

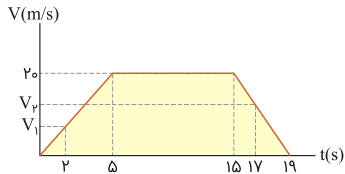
$$t = 30 \text{ s} \text{ تا } t = 15 \text{ s} : v_3 = a_3 t + v_2 \xrightarrow{a_3 = 2 \text{ m/s}^2} v_3 = 2 \times 15 + 10 = 40 \text{ m/s}$$



$$v_{av} = \frac{S_3}{\Delta t} = \frac{300}{30} = 10 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

ابتدا نمودار سرعت- زمان حرکت اتومبیل را رسم می‌کنیم:



باتوجه به ثابت بودن شتاب در ۵ ثانیه اول حرکت می‌توان سرعت در لحظه $t = 2 \text{ s}$ را حساب کرد:

$$\frac{v_0}{5} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

در چهار ثانیه آخر حرکت نیز شتاب ثابت است. در این صورت داریم:

$$\frac{v_0}{4} = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

در این صورت شتاب متوسط بین دو لحظه خواسته شده برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 10}{10} = 0 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

ابتدا معادله حرکت دو جسم را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{0 - 16}{1 - 0} t + 16 \Rightarrow x_A = -16t + 16 \\ x_B = \frac{-25 - (-29)}{1 - 0} t + (-29) \Rightarrow x_B = 4t - 29 \end{cases}$$

در لحظه‌ای که دو جسم به هم می‌رسند داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow -16t + 16 = 4t - 29 \Rightarrow 20t = 45 \Rightarrow t = 2.25 \text{ s}$$

مکان دو جسم در این لحظه برابر است با:

$$x_A = x_B = 4 \times 2.25 - 29 = -20 \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v_2 - v_o = a \Delta x \Rightarrow \frac{v_2 - v_o}{v_1 - v_o} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Rightarrow \frac{v_2 - 0}{(6)^2 - 0} = \frac{135}{15}$$

$$\Rightarrow v_2 = 18 \text{ m/s}$$

برای محاسبهٔ مدت‌زمانی که سرعت متحرک به $v_1 = 6 \text{ m/s}$ و $v_2 = 18 \text{ m/s}$ می‌رسد، با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_o}{2} \Delta t \Rightarrow \begin{cases} 15 = \frac{6 + 0}{2} \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ s} \\ 135 = \frac{18 + 0}{2} \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 15 \text{ s} \end{cases}$$

در این صورت مدت‌زمان موردنظر برابر است با:

$$\Delta t_T = 15 - 5 = 10 \text{ s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

ابتدا از فرمول مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{v_o + v}{2} \Delta t \Rightarrow 75 = \frac{v_o + 20}{2} (5) \Rightarrow v_o = 10 \text{ m/s}$$

$$v = at + v_o \Rightarrow 20 = a(5) + 10 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

طبق تصاعد عددی خواهیم داشت:

$$x_2 = x_1 + at^2$$

$$\Delta x_2 = 75 + 2(5)^2 = 125 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{125}{5} = 25 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم. چون نمودار مکان - زمان دو متحرک به‌صورت خط راست است، سرعت دو متحرک ثابت است و معادلهٔ مکان - زمان آن‌ها از رابطهٔ $x = vt + x_o$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} v_A = \frac{500 - 400}{10} = 10 \text{ m/s} \\ v_B = \frac{0 - (-300)}{10} = 30 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 10t + 400 \\ x_B = 30t - 300 \end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک برابر $|x_A - x_B|$ است. پس:

$$|x_A - x_B| = 600 \Rightarrow |10t + 400 - 30t + 300| = 600$$

$$\Rightarrow |-20t + 700| = 600 \Rightarrow \begin{cases} -20t + 700 = 600 \Rightarrow t_1 = 5 \text{ s} \\ -20t + 700 = -600 \Rightarrow t_2 = 65 \text{ s} \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال $\frac{t_2}{t_1}$ برابر $13 = \frac{65}{5}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

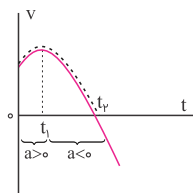
به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:

الف) نادرست؛ در لحظه t_1 تنها جهت شتاب تغییر می‌کند و سرعت همچنان مثبت و در جهت محور باقی می‌ماند.

ب) درست؛ در این بازه سرعت مثبت است یعنی حرکت متحرک در جهت محور است.

پ) نادرست؛ در این بازه تندی (اندازه سرعت) در حال افزایش است.

ت) نادرست؛ شتاب برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است. باتوجه به شیب خط مماس، در بازه $(0, t_1)$ شتاب مثبت و در بازه (t_1, t_2) شیب خط مماس منفی است.



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

ابتدا تغییرات سرعت را در هر بازه با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta v_{(0,10s)} = a_{av(0,10s)} \times \Delta t = -2 \times 10 = -20 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{(0,15s)} = a_{av(0,15s)} \times \Delta t = \frac{2}{3} \times 15 = +10 \text{ m/s}$$

باتوجه به تغییرات سرعت در دو بازه به دست آمده، تغییر سرعت در بازه $(10s, 15s)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v_{(10s,15s)} = \Delta v_{(0,15s)} - \Delta v_{(0,10s)} \Rightarrow \Delta v_{(10s,15s)} = 10 - (-20) = +30 \text{ m/s}$$

حالا شتاب متوسط در بازه $(10s, 15s)$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(10s,15s)} = \frac{\Delta v_{(10s,15s)}}{15 - 10} = \frac{30}{5} = +6 \vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

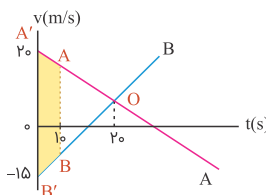
مساحت ناحیه هاشور خورده مجموع مسافتی است که دو متحرک A و B طی کرده‌اند.

از تشابه مثلث‌های $\triangle OA'B'$ و $\triangle OAB$ طول ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{10}{20} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 35 = 17.5$$

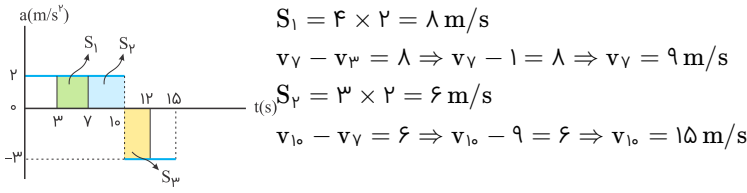
حالا مساحت دوزنقه $ABA'B'$ که هم‌اندازه مجموع مسافت‌های طی شده است را به دست می‌آوریم:

$$\ell = \frac{35 + 17.5}{2} \times 10 = 262.5 \text{ m}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گام اول: سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = ۷\text{ s}$ و $t = ۱۰\text{ s}$ به دست می‌آوریم:



گام دوم: جابه‌جایی را در بازه زمانی ۷ s تا ۱۰ s محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{v_1 + v_۲}{۲} \Rightarrow \Delta x_1 = ۳ \times \frac{۱۵ + ۹}{۲} = ۳۶\text{ m}$$

گام سوم: سرعت متحرک را در لحظه $t = ۱۲\text{ s}$ به دست می‌آوریم دقت کنید که سرعت در ابتدای بازه زمانی $(۱۰\text{ s}$ تا $۱۲\text{ s})$ ۱۵ m/s است:

$$S_۳ = ۳ \times ۲ = ۶\text{ m/s} \Rightarrow \Delta v = -۶\text{ m/s} \Rightarrow v_{۱۲} - v_{۱۰} = -۶$$

$$\Rightarrow v_{۱۲} - ۱۵ = -۶ \Rightarrow v_{۱۲} = ۹\text{ m/s}$$

گام چهارم: جابه‌جایی را در بازه زمانی $(۱۰\text{ s}$ تا $۱۲\text{ s})$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} = \frac{v_1 + v_۲}{۲} \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱۵ + ۹}{۲} \times ۲ = ۲۴\text{ m}$$

گام پنجم: سرعت متوسط را در بازه زمانی ۷ s تا ۱۲ s به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۴ + ۳۶}{۵} = ۱۲\text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

مسافت طی‌شده تا لحظه $t = ۶\text{ s}$ دو برابر اندازه جابه‌جایی در ۳ s اول است پس داریم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۳ = \frac{\ell}{۶} \Rightarrow \ell = ۱۸\text{ m} \Rightarrow \Delta x = ۹\text{ m}$$

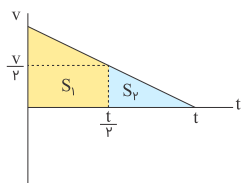
در لحظه $t = ۳\text{ s}$ سرعت متحرک صفر است بنابراین اثر جابه‌جایی در ثانیه چهارم را $-x$ فرض کنیم، جابه‌جایی در ثانیه پنجم و ثانیه ششم به ترتیب $-۳x$ و $-۵x$ است. از لحظه $t = ۳\text{ s}$ تا $t = ۶\text{ s}$ متحرک ۹ m جابه‌جا شده است. بنابراین داریم:

$$-x - ۳x - ۵x = -۹ \Rightarrow -۹x = -۹ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین متحرک در ثانیه هفتم حرکت می‌تواند به اندازه $-۷x = -۷\text{ m}$ جابه‌جا شود و از مبدأ مکان بگذرد. پس کلاً بردار مکان متحرک ۷ s در جهت محور x است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

نمودار $v - t$ حرکت را رسم می‌کنیم:



$$S_1 = \frac{v + \frac{v}{2}}{2} \times \frac{t}{2} = 150 \Rightarrow \frac{3v}{2} \times \frac{t}{2} = 150 \Rightarrow vt = 400$$

$$S_2 = \frac{\frac{v}{2} \times \frac{t}{2}}{2} = \frac{vt}{4} = \frac{400}{4} = 100 \text{ m}$$

کل جابه‌جایی اتومبیل برابر $S_1 + S_2$ است:

$$\Delta x_{\text{کل}} = 150 + 100 = 250 \text{ m}$$

راه‌حل دوم:

فرض مسئله را عوض می‌کنیم. یعنی اتومبیل از حال سکون شروع به حرکت کرده بعد $\frac{t}{2}$ از زمان شروع حرکت به اندازه Δx_1 جابه‌جا می‌شود و $\frac{t}{2}$ بعد را به اندازه $3\Delta x_1$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین کل جابه‌جایی آن $4\Delta x_1$ است. ابتدا Δx_1 را به دست می‌آوریم:

$$3\Delta x_1 = 150 \Rightarrow \Delta x_1 = 50 \text{ m}$$

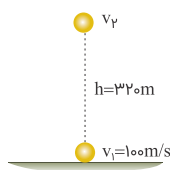
حالا کل جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{کل}} = 4\Delta x_1 = 4 \times 50 = 200 \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

باتوجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی و اینکه مقاومت هوا نداریم؛ (مبدأ پتانسیل را سطح سیاره در نظر می‌گیریم)

$$E_1 = 2500 = k_1 + \overset{\circ}{U}_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = 2500 \Rightarrow \frac{1}{2}(50/5)v_1^2 = 2500 \Rightarrow v_1 = 100 \text{ m/s}$$

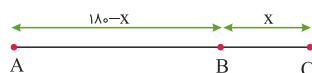


حال طبق معادله سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g_{\text{سیاره}}\Delta h \Rightarrow 0 - 100^2 = -2g_{\text{سیاره}}(320)$$

$$\Rightarrow 100 \times 100 = 2g_{\text{سیاره}}(320) \Rightarrow g_{\text{سیاره}} \simeq 15/6 \text{ m/s}^2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵



$$\begin{cases} 180 - x = v_A t \\ x = v_C t \end{cases} \Rightarrow \frac{180 - x}{x} = \frac{v_A}{v_C} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 180 - x = v_C \times 25 \\ x = v_A \times 16 \end{cases} \Rightarrow \frac{180 - x}{x} = \frac{v_C \times 25}{v_A \times 16} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{v_A}{v_C} = \frac{v_C \times 25}{v_A \times 16} \Rightarrow \frac{v_A^2}{v_C^2} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \frac{5}{4} \xrightarrow{(1)} \frac{180 - x}{x} = \frac{5}{4}$$

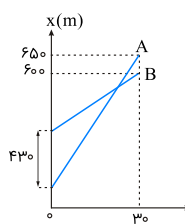
$$\Rightarrow 4(180) - 4x = 5x \Rightarrow x = 180 \text{ m}$$

حال با جایگذاری $x = 180$ در معادله (۲) مقدار v_A را به دست می آوریم:

$$x = v_A \times 16 \Rightarrow 180 = v_A \times 16 \Rightarrow v_A = 11.25 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

نمودار مکان- زمان دو متحرک به صورت خطی است؛ بنابراین سرعت دو متحرک ثابت است.



$$v_A = \frac{600 - x_{0A}}{30}$$

$$v_B = \frac{600 - x_{0B}}{30}$$

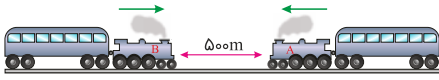
$$\Rightarrow v_A - v_B = \frac{600 - x_{0A}}{30} - \frac{600 - x_{0B}}{30}$$

$$= \frac{600 - 600 + \overbrace{(x_{0B} - x_{0A})}^{430}}{30}$$

$$= \frac{430}{30} = 14.33 \text{ m/s}$$

باتوجه به شیب نمودار مکان- زمان، اختلاف سرعت دو متحرک را به دست می آوریم:

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴



سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی است.

بنابراین جابه‌جایی هر دو متحرک را در مدت ۱۰ s که متحرک A متوقف شده است، محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{10 \times 30}{2} = 150 \text{ m}$$

شیب نمودار سرعت- زمان برابر با شتاب متحرک B است:

$$a_B = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} \text{ m/s}^2$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{8}\right) \times 10^2 + 30 \times 10 = 275 \text{ m}$$

$$B, A \text{ فاصله دو متحرک } d = 500 - (\Delta x_A + \Delta x_B) = 500 - (150 + 275) \Rightarrow d = 75 \text{ m}$$

دقت شود: اگر علامت منفی را برای شتاب متحرک B در نظر نگیریم، مسافت پیموده شده این متحرک برابر با ۵۲۵ m به دست می‌آید که تفاضل آن با ۵۰۰ m برابر با ۲۵ m می‌شود و به گزینه (۱) می‌رسیم که اشتباه است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) از حال سکون $v_0 = 0 \leftarrow$

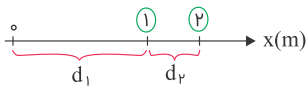
ب) مسافت طی شده در مرحله اول، ۴ برابر مسافت طی شده در مرحله دوم $d_1 = 4d_2 \leftarrow$

ج) ادامه مسیر را با شتاب ثابت a_2 طی می‌کند تا بایستد $\leftarrow v_2 = 0$ (سرعت در انتهای مسیر)، در زمان توقف شتاب منفی است پس $v_2 = 0 \leftarrow$

د) اندازه a_2 چند برابر a_1 $\leftarrow \frac{|a_2|}{|a_1|} = ?$

گام دوم

برای درک بهتر مسئله، مسافت‌های طی شده روی محور x را رسم می‌کنیم.



به کمک معادله مستقل از زمان، مسافت متحرک در مرحله اول و دوم را برحسب سرعت و شتاب به دست می‌آوریم:

$$d_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a_1} = \frac{v_1^2}{2a_1}, \quad d_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_2} = \frac{-v_1^2}{2a_2}$$

از آنجایی که $d_1 = 4d_2$ ، نسبت $\frac{|a_2|}{|a_1|}$ برابر است با:

$$d_1 = 4d_2 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2a_1} = -4 \frac{v_1^2}{2a_2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = -4 \Rightarrow \frac{|a_2|}{|a_1|} = 4$$

گام اول

الف) بدون سرعت اولیه و شتاب ثابت $\leftarrow v_A = 0$

ب) فاصله ۱۲۰ متری BC $\leftarrow \Delta x_{BC} = 120 \text{ m}$

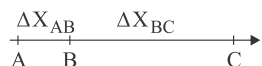
ج) BC را در مدت ۱۰s طی می‌کند. $\leftarrow \Delta t_{BC} = 10 \text{ s}$

د) سرعت متحرک در نقطه C، $v_C = 20 \text{ m/s}$ $\leftarrow 20 \text{ m/s}$

ه) فاصله بین A-B $\leftarrow \Delta x_{AB} = ? \text{ m}$

گام دوم

شتاب ثابت است، پس سرعت در نقطه B و شتاب کل برابر است با:



$$v_{avBC} = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{\Delta x_{BC}}{\Delta t_{BC}} \Rightarrow \frac{v_B + 20}{2} = \frac{120}{10} \Rightarrow v_B = 4 \text{ m/s}$$

$$a_{کل} = a_{avBC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{20 - 4}{10} = 1.6 \text{ m/s}^2$$

در نهایت با استفاده از معادله مستقل از زمان، فاصله بین A-B را محاسبه می‌کنیم:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x_{AB} \Rightarrow 16 = 2 \times 1.6 \times \Delta x_{AB} \Rightarrow \Delta x_{AB} = 5 \text{ m}$$

$$۲ \text{ ثانیه}^{\text{دوم}} : \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

$$v = 2t^2 - 4t - 2 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t_1=2\text{s}} v_1 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2 \text{ m/s} \\ \xrightarrow{t_2=4\text{s}} v_2 = 2(4)^2 - 4(4) - 2 = 14 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

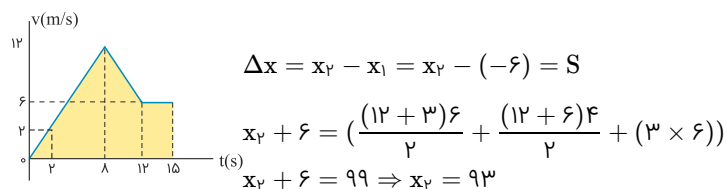
شتاب در بازه زمانی (۸, ۰) ثابت و برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(8) - v(0)}{8 - 0} = \frac{12 - 0}{8 - 0} = \frac{3}{2} \text{ m/s}^2$$

در لحظه $t = 2 \text{ s}$ سرعت را به دست می آوریم:

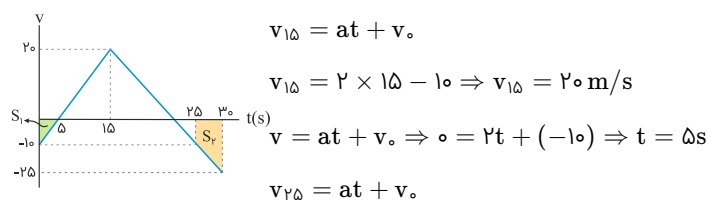
$$v(2) = at + v_0 \Rightarrow v = \frac{3}{2} \times 2 + 0 = 3 \text{ m/s}$$

حال به کمک سطح زیر نمودار سرعت- زمان جابه جایی را در بازه زمانی (۱۵, ۲) محاسبه می کنیم:



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

بهترین روش رسم نمودار سرعت- زمان است.



$$v_{25} = -3 \times 10 + 20 = -10 \text{ m/s}$$

$$v_{30} = -3 \times 15 + 20 = -25 \text{ m/s}$$

$$\frac{5 S_2 + 10 S_1}{\frac{10 \times 5}{2}} = \frac{\frac{25 + 10}{2} \times 5}{\frac{10 \times 5}{2}} = \frac{35}{10} = 3.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

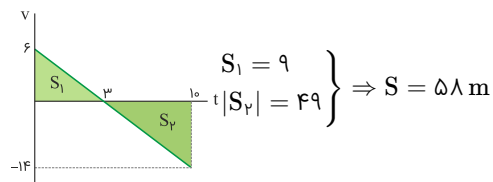
باتوجه به ماکزیمم سهمی می‌توانیم سرعت اولیه و شتاب حرکت را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t$$

$$۳۶ - ۲۷ = \frac{0 + v_0}{2} \times ۳ \Rightarrow v_0 = ۶ \text{ m/s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times ۳ + ۶ \Rightarrow a = -۲ \text{ m/s}^2$$

کافی است نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم:



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

ابتدا در مدت ۱۱ s جابه‌جایی دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_A = vt = ۱0 \times ۱۱ = ۱۱0 \text{ m}$$

$$\begin{cases} \Delta x_{1B} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2} \times 2 \times 5^2 + 2 \times 5 = ۳۵ \text{ m} \\ \Delta x_{2B} = vt_2 = (+at_1 + v_0)t_2 = (+2 \times 5 + 2)(۱۱ - 5) = ۷۲ \text{ m} \end{cases}$$

$$\Delta x_B = \Delta x_{1B} + \Delta x_{2B} = ۱۰۷ \text{ m}$$

حال می‌توانیم با مساوی قرار دادن مسافت‌های پیموده شده لحظهٔ رسیدن دو متحرک به یکدیگر و همچنین اندازهٔ سرعت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} x_B = vt = ۱۲t \\ x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x_A = \frac{1}{2}(-2)t^2 + ۱0t + ۳ \end{cases} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$-t^2 + ۱0t + ۳ = ۱۲t \Rightarrow t^2 + 2t - ۳ = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = -۳ \end{cases}$$

$$v_B = ۱۲ \text{ m/s}$$

$$v_A = -at + v_0 = -2 \times ۱ + ۱0 = ۸ \text{ m/s}$$

$$v_B - v_A = ۱۲ - ۸ = ۴ \text{ m/s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

معادلهٔ سرعت- زمان را برای بازه زمانی (۴ s - ۰ s) می‌نویسیم:

$$v = a_1 t + v_0 \xrightarrow{\text{طبق نمودار سؤال: } a_1 = 4 \text{ m/s}^2} v_4 = 4(4) + v_0 \Rightarrow v_4 = 16 + v_0$$

* تذکر: سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 4 \text{ s}$ سرعت اولیه برای بازهٔ زمانی (۴ s - ۰ s) است.

طبق صورت سؤال، جابجایی کل از ۰ تا ۱۰ ثانیه برابر با ۱۵۶ متر است؛ بنابراین:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\Rightarrow 156 = \left(\frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_0 t_1 \right) + \left(\frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_4 t_2 \right)$$

$$\xrightarrow[t_2 = 10 - 4 = 6 \text{ s}]{t_1 = 4 \text{ s}} 156 = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 16 + 4v_0 \right) + \left(\frac{1}{2} (-4)(6)^2 + 6v_4 \right)$$

$$\Rightarrow 156 = 32 + 4v_0 - 72 + 6v_4$$

$$\Rightarrow 156 = -40 + 4v_0 + 6(16 + v_0) \Rightarrow 196 = 4v_0 + 96 + 6v_0$$

$$\Rightarrow 100 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

روش اول: حل عادی

شتاب برابر با شیب نمودار $v-t$ است. $\leftarrow a = -\frac{v_o}{t_1}$

$V(m/s)$

V_o

V_v

V_{t_1-v}

$t(s)$

t_1

t_1-v

v

$v = at + v_o \Rightarrow$

$\begin{cases} v_v = -v \frac{v_o}{t_1} + v_o \\ v_{t_1-v} = -\frac{v_o}{t_1}(t_1 - v) + v_o \end{cases}$

$\Delta x = \frac{v_v + v_o}{v} \times \Delta t = \frac{(-v \frac{v_o}{t_1} + v_o) + v_o}{v} \times v \Rightarrow \Delta x = 2v_o - \frac{v v_o}{t_1}$ (۱)

$\Delta x = \frac{v + v_{t_1-v}}{v} \Delta t \Rightarrow \Delta x = \frac{v - v_o + \frac{v v_o}{t_1} + v_o}{v} \times v \Rightarrow \Delta x = \frac{v v_o}{t_1}$ (۲)

$\xrightarrow{(۲) \rightarrow (۱)} \Delta x = 2v_o - \Delta x \Rightarrow v_o = 20 m/s \Rightarrow t_1 = 10 s$

روش دوم: حل تستی

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، در بازه‌های زمانی مساوی، جابه‌جایی‌ها تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت at^2 را می‌دهند.

چون متحرک متوقف شده است می‌توانیم حرکت را از آخر به اول شروع کنیم:

$$d = at^2 \quad (I)$$

$$\begin{array}{c} \frac{2s}{x_1 = 4m} \quad \frac{2s}{x_2 = 36m} \end{array}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} a \times 2^2 \Rightarrow a = 2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II) \rightarrow (I)} d = 2(2)^2 = 8 m$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 m$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + d = 4 + 8 = 12 m$$

$$\Rightarrow x_3 = x_2 + d = 12 + 8 = 20 m$$

$$\Rightarrow x_4 = x_3 + d = 20 + 8 = 28 m$$

$$\Rightarrow x_5 = x_4 + d = 28 + 8 = 36 m$$

در نتیجه جابه‌جایی به ۵ قسمت تقسیم شده که هر قسمت ۲s طول کشیده است.

$$t_1 = 5 \times 2 = 10 s$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

باتوجه به اینکه نمودار مکان- زمان به صورت یک سهمی است و سهمی متقارن است؛ و از آنجاکه ۴ ثانیه طول کشیده تا سرعت متحرک صفر شود، پس ۴ ثانیه دیگر طول می‌کشد تا به قرینه نقطه شروع (جایی که بزرگی سرعت برابر بزرگی سرعت اولیه شود) برسد. بنابراین در کل ۸ ثانیه پس از لحظه $t = 0$ این اتفاق می‌افتد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

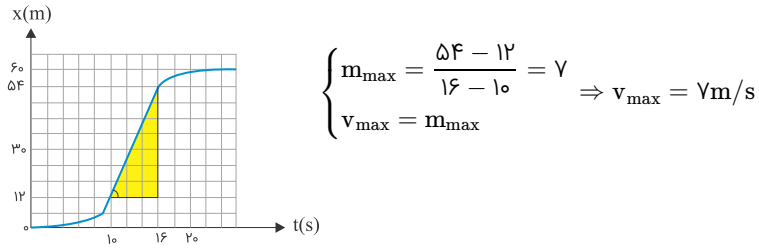
$$\text{A متحرک: } \Delta x = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + v_0^{\circ} t \Rightarrow 75 = \frac{1}{\gamma} (1/5) t^{\gamma} \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

$$\text{B متحرک: } \Delta x = \frac{1}{\gamma} at^{\gamma} + v_0^{\circ} t \Rightarrow 150 = \frac{1}{\gamma} a (10)^{\gamma} \Rightarrow a_B = 3 \text{ m/s}^{\gamma}$$

$$\left. \begin{aligned} v_A &= at + v_0 = 1/5 \times 10 + 0 = 15 \text{ m/s} \\ v_B &= at + v_0 = 3 \times 10 + 0 = 30 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{30}{15} = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در نمودار مکان- زمان، شیب مماس بر نمودار بیانگر سرعت است. از آنجاکه بیشینه سرعت را می‌خواهیم، کافی است بیشترین شیب مماس بر نمودار را بیابیم. مطابق نمودار داریم:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

شتاب همواره مثبت است، پس اگر:

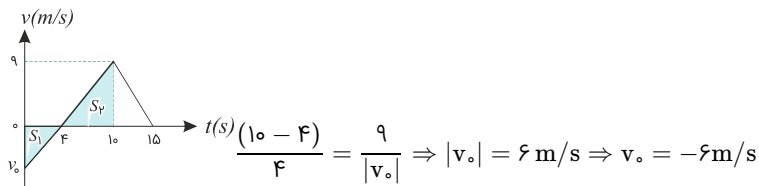
الف) متحرک با سرعت اولیه منفی شروع به حرکت کند، حرکت آن ابتدا کندشونده است، سپس تندشونده است.

ب) متحرک با سرعت اولیه صفر و یا مثبت شروع به حرکت کند، حرکت آن تندشونده می‌باشد.

بنابراین حرکت متحرک به سرعت اولیه بستگی دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

برای محاسبه شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید سرعت در لحظات $t = 0$ و $t = 15 \text{ s}$ را داشته باشیم.



باتوجه به نمودار و نسبت تشابه دو مثلث S_1 و S_2 داریم:

(علامت منفی سرعت اولیه به خاطر این است که پایین محور زمان قرار دارد).

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = \frac{6}{15} = 0.4 \text{ m/s}^2$$

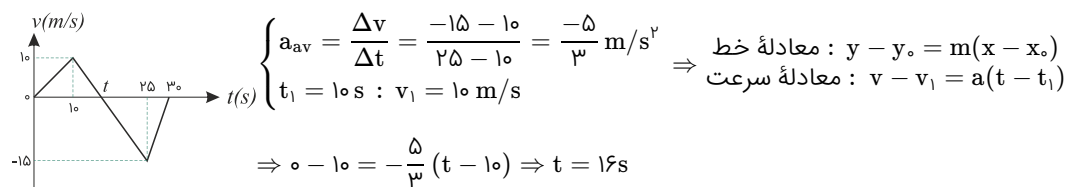
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

بزرگی سرعت متوسط در مدتی که مخالف محور x حرکت می‌کند؟ $\leftarrow v_{av} = ?$ در مدتی که $v < 0$

گام دوم

برای به دست آوردن بزرگی سرعت متوسط باید از رابطه $|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|}$ استفاده کنیم. مطابق نمودار باید زمان t که سرعت صفر می‌شود را به دست آوریم (با استفاده از معادله سرعت- زمان در بازه زمانی ۱۰s تا ۲۵s):



حالا باید جابه‌جایی را از بازه زمانی $t = 16 \text{ s}$ تا $t = 30 \text{ s}$ (زمانی که سرعت منفی است) به دست آوریم (دقت شود که جابه‌جایی منفی است، چون نمودار زیر محور زمان است).

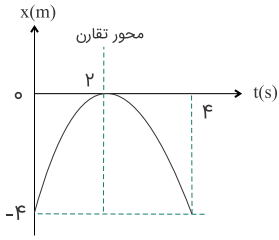
$$\begin{cases} \Delta x = -S \\ S = \frac{15 \times (30 - 16)}{2} = 105 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -105 \text{ m}$$

جابه‌جایی و تغییرات زمان را در رابطه $|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|}$ قرار می‌دهیم:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} = \frac{105}{14} = 7.5 \text{ m/s}$$

روش اول)

نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم:



$$x = -t^2 + 4t - 4 \Rightarrow \text{رأس سهمی} : t = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ s}$$

مطابق نمودار، وسط بازه زمانی ۰ تا ۴ ثانیه، یعنی $t = 2 \text{ s}$ ، محور تقارن است و جهت حرکت جسم عوض می‌شود. پس مسافت طی شده در ۴ ثانیه برابر است با دو برابر جابجایی از ۰ تا لحظه ۲s:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = +4 \text{ m}$$

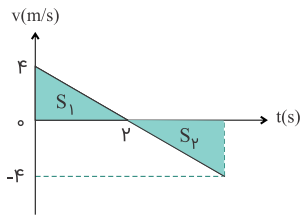
$$\text{مسافت طی شده از ۰ تا ۴ ثانیه} = 2\Delta x = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$$

روش دوم)

معادله سرعت را به دست می‌آوریم و با استفاده از رسم نمودار $v - t$ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$x = -t^2 + 4t - 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 4 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v = -2t + 4$$

$$\begin{array}{c|cc} t(\text{s}) & 0 & 2 & 4 \\ \hline v(\text{m/s}) & 4 & 0 & -4 \end{array}$$

قدر مطلق مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مسافت طی شده است:

$$\text{مسافت طی شده} = |S_1| + |S_2| = \left| \frac{4 \times 2}{2} \right| + \left| \frac{-4 \times 2}{2} \right| = 8 \text{ m}$$

ابتدا از روی معادلهٔ مکان- زمان، معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ سرعت- زمان را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، بیابیم.

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t - x_0 \Rightarrow \begin{cases} a = -9.8 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 12 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = -9.8t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1.22 \text{ s}$$

کافی است میزان جابه‌جایی متحرک را در دو بازهٔ ۰ تا ۱.۲۲s و ۱.۲۲s تا ۵s حساب کرده و در نهایت باهم جمع کنیم تا مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا $t = 5 \text{ s}$ به دست آید:

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t - x_0$$

$$\begin{cases} x_0 = -4 \text{ m} \\ x_{1.22} = -\frac{1}{2} \times 9.8 + 12 \times 1.22 - 4 = -2.2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow |\Delta x| = |-2.2 - (-4)| = 1.8 \text{ m}$$

$$\begin{cases} x_{1.22} = -2.2 \text{ m} \\ x_5 = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 + 12 \times 5 - 4 = -23.25 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow |\Delta x'| = |-23.25 - (-2.2)| = 21 \text{ m}$$

$$d = |\Delta x| + |\Delta x'| = 1.8 + 21 = 22.8 \text{ m}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) دو متحرک A و B از یک نقطه بدون سرعت اولیه $\leftarrow v_{0A} = x_{0B} = 0$ ، $v_{0A} = v_{0B} = 0$

ب) شتاب متحرک A، ۴ برابر متحرک B $\leftarrow a_A = 4a_B$

ج) در جابجایی مساوی، سرعت متوسط متحرک A چندبرابر سرعت متوسط متحرک B است؟ $\leftarrow \frac{v_{Aav}}{v_{Bav}} = ?$ ، $\Delta x_A = \Delta x_B$

گام دوم

با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان برای دو متحرک A و B، نسبت سرعت ثانویهٔ آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v_{1A}^2 - v_{0A}^2 = 2a_A \Delta x_A \\ v_{1B}^2 - v_{0B}^2 = 2a_B \Delta x_B \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{1A}^2}{v_{1B}^2} = \frac{a_A}{a_B} = 4 \Rightarrow \frac{v_{1A}}{v_{1B}} = 2$$

از آنجایی‌که $v_{av} = \frac{v_0 + v_1}{2}$ نسبت $\frac{v_{Aav}}{v_{Bav}}$ برابر است با:

$$\frac{v_{Aav}}{v_{Bav}} = \frac{\frac{v_{0A} + v_{1A}}{2}}{\frac{v_{0B} + v_{1B}}{2}} = \frac{v_{1A}}{v_{1B}} = 2$$

چون حرکت دو متحرک، حرکت با شتاب ثابت است، بنابراین از معادلهٔ سرعت- زمان حرکت شتاب ثابت یعنی $v = at + v_0$ استفاده می‌کنیم و برای هر دو متحرک این معادله را می‌نویسیم و همچنین چون دو متحرک از حال سکون حرکت کرده‌اند $v_0 = 0$ ؛ یعنی داریم:

$$\begin{cases} \text{متحرک اول: } v = at + v_0 \xrightarrow{v=10} 10 = at & (1) \\ \text{متحرک دوم: } v = at + v_0 \xrightarrow{v=22} 22 = (a + 1/5)t & (2) \end{cases}$$

با قرار دادن مقدار a از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} 22 = 10 + 1/5t \Rightarrow 12 = 1/5t \Rightarrow t = 60 \text{ s}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

گام اول

الف) دو متحرک از حال سکون $\leftarrow v_{o1} = v_{o2} = 0$

ب) با شتاب‌های 2 m/s^2 , $1\text{ m/s}^2 \leftarrow a_1 = 2\text{ m/s}^2$, $a_2 = 1\text{ m/s}^2$

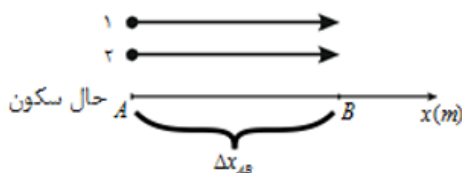
ج) از نقطه A در مسیر مستقیم به مقصد نقطه B همزمان حرکت می‌کنند $\leftarrow \Delta x_1 = \Delta x_2$

د) اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به مقصد ۳ ثانیه است $\leftarrow t_2 = t_1 - 3$

ه) فاصله AB ؟ $\leftarrow \Delta x_{AB} = ?$

گام دوم

با مساوی قرار دادن مقدار جابجایی دو متحرک و اینکه اختلاف زمانی آن‌ها ۳ ثانیه است، لحظه t_1 را محاسبه کرده و در معادله مکان جاگذاری می‌کنیم تا فاصله AB به دست آید:



$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \rightarrow \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_{o1} t_1 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_{o2} t_2 \rightarrow t_1^2 = 4(t_1 - 3)^2 \rightarrow t_1 = 6 \text{ s}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{AB} \rightarrow \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 36 = 36 \text{ m}$$

گام اول

الف) در مبدأ زمان با سرعت 3 m/s از مکان 4 m می‌گذرد $\leftarrow x_o = +4 \text{ m}$, $v_o = +3 \text{ m/s}$

ب) متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ در جهت مثبت محور x و در بیشترین فاصله خود از مبدأ است. $\leftarrow t_1 = 4 \text{ s}$, $v_1 = 0$

ج) در لحظه $t = 8 \text{ s}$ در چند متری مبدأ ؟ $\leftarrow t = 8 \text{ s}$, $x = ?$

گام دوم

روش اول)

برای درک بهتر، مسیر حرکت متحرک را روی محور x رسم می‌کنیم.

با توجه به اینکه سرعت اولیه مثبت، شتاب ثابت و سرعت در بیشترین فاصله از مبدأ، صفر است و اینکه $a < 0$ است، می‌یابیم که متحرک بعد از ۴ ثانیه شروع به حرکت، در خلاف جهت محور x می‌کند و در همان مدت ۴ ثانیه دوباره به نقطه اول باز می‌گردد و بعد از مدت ۸ ثانیه به مکان اولیه خود یعنی ۴ متری مبدأ می‌رسد.

روش دوم)

معادله سرعت - زمان را می‌نویسیم و شتاب را به دست می‌آوریم.

$$v_1 = at_1 + v_o \rightarrow 0 = 4 \times a + 3 \rightarrow a = \frac{-3}{4} \text{ m/s}^2$$

سپس با استفاده از معادله مکان - زمان، مکان را در لحظه $t = 8 \text{ s}$ پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + x_o \rightarrow x = \frac{1}{2} \times \frac{-3}{4} \times 8^2 + 3 \times 8 + 4 = +4 \text{ m}$$